dc_483_12

Bifurkációk komplex rendszerek differenciálegyenleteiben

Simon L. Péter

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Matematikai Intézet

Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Doktori értekezés tézisei

2012

1. A kutatási téma

A doktori értekezésben differenciálegyenletekkel leírható komplex rendszerek két fontos típusával, reakció-diffúzió egyenletekkel és hálózati folyamatokkal kapcsolatos, az utóbbi 10 évben elért eredményeinket mutatjuk be.

A reakció-diffúzió egyenletek matematikailag szemilineáris parabolikus parciális differenciálegyenletek, melyek általános alakja

$$\partial_t u = D\Delta u + f(u), \tag{1}$$

ahol $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ az ismeretlen függvény, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ folytonosan differenciálható függvény és D pozitív elemű diagonális mátrix. Az egyenlet neve a kémiai alkalmazásból származik, ez esetben $u_k(t, x)$ a reakcióban résztvevő k-adik ($k = 1, 2, \ldots, m$) anyag koncentrációját jelenti a t időpontban és az x helyen, továbbá a jobboldal első tagja fejezi ki a diffúziót, a második pedig a kémiai reakciókat. Az egyenlet azonban számos más fizikai, biológiai, közgazdasági jelenség modellje is lehet a járványterjedéstől az ingerület vezetésen át a mintázat képződésig. Reakció-diffúzió egyenletek különböző alkalmazásairól számtalan publikáció között több könyv is található [25, 26, 35].

A reakció-diffúzió egyenletek kutatása az alkalmazásokon kívül a dinamikai rendszerek elméletéből nőtt ki, ugyanis az $U(t) = u(\cdot, t)$ függvényt bevezetve az (1) egyenlet az

$$\dot{U}(t) = AU(t) + F(U(t)) \tag{2}$$

absztrakt Cauchy-feladatként írható fel. Kézenfekvő tehát megvizsgálni, hogy az $\dot{x}(t) = f(x(t))$ közönséges differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó eredmények mennyiben általánosíthatók a (2) végtelen dimenziós feladatra. Ismert, hogy a közönséges differenciálegyenlet-rendszer megoldásai dinamikai rendszert határoznak meg. A (2) egyenlet esetében ennek bizonyítása azért sokkal nehezebb feladat, mert a jobboldalon szereplő A operátor nem korlátos. Az ötvenes évektől kezdődően kifejlesztett operátor félcsoport elmélet segítségével kidolgozták a (2) Cauchy-feladatra vonatkozó egzisztencia elméletet. A dinamikai rendszer létezésének bizonyításával megkezdődhetett a kvalitatív tulajdonságok tanulmányozása. Ez magában foglalja a stacionárius, periodikus, kaotikus, illetve utazó hullám megoldások létezésének, pontos számának, valamint stabilitásának vizsgálatát. A speciális típusú megoldásokon kívül fontos kérdés a megoldások aszimptotikus (hosszú idő utáni) viselkedése, valamint az attraktorok létezésének kérdése, és vonzási tartományaik meghatározása, melyet általánosan tárgyal Robinson könyve [44], valamint Fiedler és Scheel összefoglaló dolgozata [22]. A közönséges differenciálegyenleteknél tapasztalt jelenségek természetesen a végtelen dimenziós megfelelőjük esetében is megjelennek, számos új jelenség kíséretében. A kvalitatív vizsgálatban fontos szerepet játszanak a variációs módszerek [3, 16], az alsó és felső megoldások konstruálásán alapuló monoton módszerek [16, 41], valamint a topológiai módszerek, melyek fő eszközei a Leray-Schauder fokszám és a Conley-féle index [16, 47]. A stacionárius megoldások számával kapcsolatos eredményekről részletes összefoglalást adunk az értekezés 2. fejezetében, az ezzel foglalkozó könyvek és összefoglaló munkák közül kiemeljük Lions dolgozatát [36] és Shi könyvét [46]. Az utazó hullámokat az értekezés 3. fejezetében tárgyaljuk részletesen, itt csak a [50] monográfiára utalunk. A kvalitatív elméletnek ez a két területe az, amellyel magunk is foglalkoztunk.

Hálózati folyamatok matematikai modellezésénél adott egy N csúcsú gráf, melynek csúcsai véges sok (m) állapot valamelyikében lehetnek, valamint adott egy dinamika, amely megadja, hogy a csúcsok állapota hogyan változik a szomszédos csúcsok állapotától függően. A modell egy m^N elemű állapottéren megadott folytonos idejű Markov-lánc, melynek állapotegyenlete egy m^N egyenletből álló lineáris közönséges differenciálegyenletrendszer. A vizsgálatok elsődleges célja a különböző állapotokban levő csúcsok száma várható értékének meghatározása. Kutatásaink során egy gráffal megadott hálózaton történő járványterjedést vizsgáltunk, azonban a járványterjedésen kívül számos más jelenség vezet hasonló matematikai problémához, például a híresztelések terjedése társadalmi hálózaton, vagy az aktivitás terjedése biológiai neurális hálózatokon. A hálózati folyamatok vizsgálata viszonylag új kutatási terület, ennek ellenére matematikai leírásáról már megjelentek összefoglaló munkák, Newman, Barabási és Watts könyve [38], Barrat, Barthélemy és Vespignani monográfiája [6], valamint kifejezetten a járvány és híresztelés terjedésről Draief és Massoulié könyve [17].

A kutatások célja annak felderítése, hogy a gráf szerkezetének ismeretében mit tudunk mondani a különböző állapotokban (pl. egészséges és fertőző) levő csúcsok számának várható értékéről. Mivel az állapottér m^N méretű, azért eddig viszonylag kevés olyan eredmény született, amely a gráf szerkezetét kapcsolatba tudta hozni a különböző típusú csúcsok számának várható értékével. A kérdés fontossága, és a számítási kapacitás jelentős megnövekedése hatására azonban a kilencvenes évek végére számos olyan dolgozat született (elsősorban biológusok és fizikusok munkái), amelyben különböző gráfokon adott dinamika esetén Monte-Carlo szimuláció segítségével összehasonlították a folyamat jellemzőit. A szimulációk alapján numerikus tapasztalatot szerezhetünk, de elméleti összefüggést nem tudunk megállapítani a gráf szerkezete és a folyamat jellemzői között. Az értekezésben azt vizsgáljuk, hogy a folyamatot leíró Markov-lánc alapegyenletének nevezett differenciálegyenletben hogyan jelenik meg a gráf struktúrája, és a differenciálegyenletek elmélete eszközeinek segítségével mit lehet mondani a gráf szerkezete és a folyamat jellemzői közötti kapcsolatról.

2. Vizsgálati módszerek és irodalmi háttér

Reakció-diffúzió egyenletek stacionárius megoldásainak számával kapcsolatos eredményeink ismertetéséhez tekintsük a következő problémát. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sima határú tartomány, a legtöbb esetben ez gömb lesz, és tekintsük a $\Delta u + f(u) = 0$ szemilineáris elliptikus egyenletet azonosan nulla Dirichlet peremfeltétel, azaz $u|_{\partial\Omega} = 0$ mellett. Vizsgálatunk tárgya a pozitív megoldások száma. A kérdésfelvetés ilyen formában nagyon általános, az irodalomban több ezer publikáció található ezzel kapcsolatosan, melyek különböző tartományok és különböző nemlinearitások esetén tárgyalják a kérdést. Általános tartomány esetén a megoldások számának vizsgálatára topológiai, variációs és monoton módszereket, valamint bifurkációs technikákat alkalmaznak. A nemlinearitások tekintetében jelentős és gyors fejlődésnek lehetünk tanúi az irodalmat tanulmányozva. Először monoton f függvények esetén vizsgálták a kérdést, majd a konkáv és konvex függvények után olyanok következtek, melyek egy szakaszon konvexek egy másikon pedig konkávak. Az eredmények nagyrészt a megoldás létezéséről, illetve egyértelműségéről szólnak. Több megoldás létezésének bizonyítása jóval nehezebb feladat, a megoldások pontos számának eldöntése pedig csak speciális esetekben sikerül. Az általunk kitűzött cél az általános kérdésfelvetésnél annyiban egyszerűbb, hogy gömb tartományon vizsgáljuk a feladatot, viszont szeretnénk a megoldások pontos számát megadni, legalábbis bizonyos nemlinearitások esetén. A továbbiakban tehát a

$$\Delta u + f(u) = 0 \quad B_R\text{-ben} \tag{3}$$
$$u = 0 \quad \partial B_R\text{-en} \tag{4}$$

peremérték-problémát vizsgáljuk, ahol B_R az origó közepű R sugarú gömb.

Gömb tartomány esetén a pozitív megoldásokról ismert, hogy radiálisan szimmetrikusak [24], ezért a feladat az alábbi, közönséges differenciálegyenletre vonatkozó peremérték-feladatra redukálódik.

$$ru''(r) + (n-1)u'(r) + rf(u(r)) = 0 \tag{5}$$
$$u'(0) = 0,\ u(R) = 0. \tag{6}$$

Célunk tehát ezen feladat pozitív megoldásainak pontos számát meghatározni különböző f függvények esetében. Az értekezésben az ezzel kapcsolatos irodalmat részletesen ismertetjük, itt csak a legfontosabb dolgozatokra térünk ki.

Az első nem-lineáris eredmény az $f(u) = u^p$ függvényre vonatkozott, Pohozaev 1965-ben bebizonyította [42], hogy pontosan akkor létezik pozitív megoldás, ha $p < \frac{n+2}{n-2}$. Pohozaev ezen eredménye nagy hatással volt a későbbi vizsgálatokra. Joseph és Lundgren [30] 1973-ban az $f(u) = (1+u)^p$ esetet vizsgálták, kiderült, hogy $p = \frac{n+2}{n-2}$ esetén itt is jelentősen megváltozik a megoldások száma. A későbbi intenzív kutatásokat Brezis és Nirenberg 1983-as cikke [9] indította el. Ebben foglalkoztak először az $f(u) = u^p + u^q$ esettel, elsősorban akkor, amikor $p = \frac{n+2}{n-2}$ és $1 \leq q < \frac{n+2}{n-2}$. Míg Brezis és Nirenberg általános tartományon tanulmányozták a kérdést, addig a megoldások pontos számával kapcsolatos eredmények elsősorban a gömb tartomány és radiális megoldások esetére vonatkoztak. Atkinson és Peletier [4] 1986-ban megmutatták, hogy $p = 5$, $n = 3$ és $1 < q \leq 3$ esetén gömbön létezik legalább két pozitív megoldás. Ezután az eredmény után intenzív kutatás indult meg azzal a céllal, hogy kiderítsék, mely n és $1 \leq q < p < \frac{n+2}{n-2}$ értékek mellett lesz az $f(u) = u^p + u^q$ esetben a pozitív megoldás egyértelmű. Számos dolgozat megjelenését követően végül Erbe és Tang 1997-ben [19] bebizonyították, hogy $p - 1 \leq q < p < \frac{n+2}{n-2}$ esetén a megoldás egyértelmű. Ez utóbbi eredményből az is következik, hogy ha $n \geq 6$, akkor a teljes vizsgált tartományban, azaz $1 \leq q < p < \frac{n+2}{n-2}$ esetén egyértelmű a megoldás, kisebb n esetén az egyértelműség kérdése még nyitott. A fenti összefoglalást az $f(u) = u^p + u^q$ függvény esetére végeztük el, azonban az említett dolgozatok nagy része általánosabb f függvényekre vonatkozik. A konvex-konkáv típusú nemlinearitások (amikor f egy szakaszon konvex, egy másikon pedig konkáv) vizsgálata Ambrosetti, Brezis és Cerami cikkével kezdődött [2]. Ebben az esetben elsősorban az $f(u) = u^p - u^q$, $f(u) = u^p + u^q$ $(q < 1)$, illetve $f(u) = u(u-b)(c-u)$ függvények adják a vizsgálatok motivációját. A témával foglalkozó cikkek közül kiemelendő Ouyang és Shi dolgozata [39], melyben bizonyos kiegészítő feltételeket teljesítő konvex-konkáv típusú nemlinearitások esetén megadják a bifurkációs diagrammok teljes osztályozását.

Az utazó hullám megoldásokkal kapcsolatos vizsgálatainkban a térbeli tartomány egydimenziós, azaz a számegyenes. Ekkor az (1) rendszer a következő alakba írható.

$$\partial_t u = D\partial_{xx} u + f(u), \tag{7}$$

melyben $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ az ismeretlen függvény.

Az egyenlet $u(t,x) = U(x-ct)$ alakú megoldását, melyben $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ függvény, c sebességgel haladó utazó hullám megoldásnak nevezik. Az U függvény teljesíti az alábbi közönséges differenciálegyenlet-rendszert:

$$DU''(y) + cU'(y) + f(U(y)) = 0, \qquad (y = x - ct). \tag{8}$$

Ehhez a másodrendű egyenlethez természetes módon peremfeltételek is tartoznak. Adott $U_-, U_+ \in \mathbb{R}^m$ esetén a

$$\lim_{-\infty} U = U_-, \qquad \lim_{+\infty} U = U_+$$

peremfeltételhez tartozó utazó-hullámot frontnak nevezzük, amennyiben $U_- \neq U_+$, valamint pulzusnak nevezzük, ha $U_- = U_+$. Ha az U függvény periodikus, akkor a "wave train" elnevezést használják.

A irodalomban széles körben vizsgált kérdés az utazó hullám megoldások létezése, amely visszavezethető egyensúlyi pontokat a $2m$ dimenziós térben összekötő pályák létezésére. Egy egyenlet, azaz $m = 1$ esetén fázissík analízis segítségével lehet igazolni ilyen megoldások létezését, a módszert részletesen ismerteti Fife könyve [23]. Ha (8) több egyenletből áll, azaz $m > 1$, akkor az egyensúlyi pontokat összekötő pályát magasabb (legalább négy) dimenziós fázistérben kell keresni, amely már jóval nehezebb feladat. Ebben az esetben az utazó hullám létezésének igazolására kétféle módszert szoktak alkalmazni. Az egyik hatékony eszköz ilyen típusú problémák kezelésére a Conley index, melyet részletesen tárgyal Smoller könyve [47]. A másik módszer a Leray-Schauder fokszám alkalmazása, amely technikailag nehéz, mivel a térbeli tartomány nem korlátos. A módszer leírása egy lángterjedéssel kapcsolatos modell esetében Berestycki és munkatársai dolgozatában olvasható [8].

Saját kutatásaink az utazó hullám megoldások stabilitásával foglalkoztak. A létezéshez hasonlóan a stabilitásvizsgálat is lényegesen eltér egy egyenlet ($m = 1$), illetve több egyenletből álló rendszer ($m > 1$) esetében. Ugyanis $m = 1$ esetén a (8) típusú szemilineáris parabolikus egyenletre a maximum elvből levezethető egy összehasonlítási tétel, amelynek segítségével stabilitási tételek igazolhatók [23]. Ebben az esetben nemcsak a lokális stabilitás igazolható, hanem az utazó hullám vonzási tartományára is adható becslés. Ha a (8) rendszer több egyenletből áll, akkor általában nem érvényes az összehasonlítási tétel. Ekkor az utazó hullám lokális stabilitását linearizálással lehet eldönteni, ami egy operátor spektrumának vizsgálatára vezet. A spektrum lényeges részét az exponenciális dichotómiák segítségével, míg a pont spektrumot az Evans-függvény segítségével lehet meghatározni. Ezeket a módszereket a 3.5. szakaszban fogjuk ismertetni.

Hálózati folyamatokkal kapcsolatos saját kutatásaink egy speciális két állapotú dinamikával, az SIS típusú járványterjedéssel foglalkoztak különböző gráfok esetén. Az alap probléma a gráffal és a dinamikával megadott, 2^N egyenletből álló lineáris differenciálegyenlet-rendszer vizsgálata. A cél először a modell formális definiálása, majd a differenciálegyenletek elméletének eszközeivel a modell redukálása olyan egyszerűbb rendszerekre, amelyek kvalitatív vizsgálata minél többet elárul a modell viselkedéséről. A redukálás tekintetében három módszerrel foglalkoztunk. Először a gráf automorfizmusainak segítségével a lineáris rendszer összevonásának (lumping) lehetőségét tanulmányoztuk. Ezután levezettünk olyan differenciálegyenleteket, amelyek a különböző típusú csúcsok, illetve élek számának várható értékére vonatkoznak. Végül megmutattuk, hogy bizonyos esetekben a heurisztikusan bevezetett, mean-field típusú közelítő differenciálegyenletek (melyek kevés ismeretlent tartalmaznak) $1/N$ nagyságrendben közelítik az eredeti megoldását, ahol N a gráf csúcsainak száma.

3. Reakció-diffúzió egyenletekkel kapcsolatos új eredmények

Reakció-diffúzió egyenletekkel kapcsolatos eredményeink egyrészt a pozitív stacionárius megoldások számára és stabilitására, másrészt az utazó hullám megoldások stabilitására vonatkoznak. A következő szakaszokban ezeket fogjuk ismertetni.

3.1. A "time-map" módszer

Ebben a szakaszban bemutatjuk vizsgálataink legfontosabb eszközét az ú.n. célbalövéses, vagy "time-map" módszert, melynek szisztematikusan használható változatát az [56] dolgozatban fejlesztettük ki, és számos nyitott kérdés megoldásánál alkalmaztuk. A módszer lényege, hogy az (5) differenciálegyenletet először a (6) peremfeltétel helyett az

$$u(0) = c, \qquad u'(0) = 0 \tag{9}$$

kezdeti feltétellel tekintjük, majd a peremérték-probléma megoldását az ú.n. célbalövéses módszerrel keressük (shooting), azaz a c értékét változtatjuk mindaddig, amíg olyan megoldást kapunk, amelynek első gyöke a R pontban van. Ehhez definiáljuk az alábbi leképezést (time-map).

$$T(c) = \min\{r > 0 \ : u(r,c) = 0\} \ ; \qquad D(T) = \{c > 0 \ : \exists r > 0 \ u(r,c) = 0\}. \tag{10}$$

Az (5)-(6) peremérték-probléma pozitív megoldásainak száma tehát egyenlő a $T(c) = R$ egyenlet c-re kapott megoldásainak számával. Ennek meghatározásához a T leképezés alábbi tulajdonságaira van szükség:

- T értelmezési tartománya;
- T határértéke az értelmezési tartomány határpontjaiban;
- T monotonitása az értelmezési tartomány részintervallumaiban.

A következő szakaszokban a time-map fenti három tulajdonságának általános vizsgálatával foglalkozunk.

3.1.1. A "time-map" monotonitása

A monotonitás meghatározásához célszerű a T függvényt meghatározó

$$u(T(c),c) \equiv 0 \qquad u(r,c) > 0, \quad 0 < r < T(c)$$

implicit egyenletet használni. Vezessük be a

$$h(r,c) = \partial_c u(r,c), \qquad z(r,c) = \partial_c^2 u(r,c)$$

függvényeket, majd differenciáljuk az egyenletet. Ekkor a T függvény deriváltjaira az alábbiakat kapjuk

$$u'(T(c),c)T'(c) + h(T(c),c) = 0,$$
$$u'(T(c),c)T''(c) + z(T(c),c) = 0,$$

ahol az utóbbi csak $T'(c) = 0$ esetén áll fenn. Vegyük észre, hogy ezekben az egyenletekben $u'(T(c),c) < 0$, hiszen $T(c)$ az u függvény első zérushelye. Így $T'(c)$ és $T''(c)$ előjelét a h és z függvény előjele határozza meg. Ezen függvények gyökeinek elhelyezkedését a Sturm-féle szeparációs tétel segítségével lehet vizsgálni, ugyanis ezekre hasonló alakú differenciálegyenlet írható fel. Az alábbiakban, ha nem okoz félreértést, akkor az u, h, z, v függvények második változóját nem írjuk ki, tehát például $u(r,c)$ helyett $u(r)$-et írunk. A továbbiakban alapvető fontosságú lesz az alábbi Lemma.

1. Lemma. *Ha $n = 1$, akkor a h függvénynek legfeljebb egy gyöke lehet a $[0, T(c)]$ intervallumban.*

A Lemmát az [56] dolgozatban bizonyítottuk ilyen egyszerű formában, ugyanis ennek segítségével konvex nemlinearitás esetén teljes leírás adható a megoldások pontos számáról. A későbbi vizsgálatokban alapvető szerepet játszik az alábbi feltétel, melynek az irodalomban "disconjugacy" feltétel a neve:

$$\text{A } h \text{ függvénynek legfeljebb egy gyöke lehet a } [0, T(c)] \text{ intervallumban.} \tag{11}$$

A Lemma szerint, ez bármely f függvény esetén teljesül, ha $n = 1$. Azonban $n > 1$ esetén csak bizonyos függvényekre igaz. Amint ez közvetve már ismert volt, a (11) feltétel nem igaz például az $f(u) = (1+u)^p$ függvény, és $p > \frac{n+2}{n-2}$ esetén [30], valamint az $f(u) = u^5+u^2$ függvény és $n = 3$ esetén [4]. A feltétel teljesülésének bizonyítása a legtöbb esetben meglehetősen nehéz. Azonban mivel kulcsszerepet játszik a megoldások pontos számának meghatározásában, azért számos speciális esetben igazolták $n > 1$ esetén is.

A T deriváltjaira vonatkozó fenti képletek és a Sturm-féle szeparációs tétel segítségével a következő állítások bizonyíthatók a T monotonitásával kapcsolatban.

1. Állítás. *Tegyük fel, hogy teljesül a (11) feltétel és f szuperlineáris, azaz $uf'(u) - f(u) > 0$ minden $u > 0$ esetén, (vagy másszóval $\frac{f(u)}{u}$ szigorúan monoton növő). Ekkor fennáll $T' < 0$.*

2. Állítás. *Tegyük fel, hogy f szublineáris, azaz $uf'(u) - f(u) < 0$ minden $u > 0$ esetén, (vagy másszóval $\frac{f(u)}{u}$ szigorúan monoton fogyó). Ekkor fennáll $T' > 0$.*

Megjegyezzük, hogy a szuperlinearitás és a szublinearitás a függvény konvexitásával függ össze, hiszen az $l(u) = uf'(u) - f(u)$ függvényre $l'(u) = uf''(u)$. Ezért $f'' > 0$ és $f(0) \leq 0$ esetén, f szuperlineáris, $f'' < 0$ és $f(0) \geq 0$ esetén, pedig szublineáris.

A T függvény monotonitásának vizsgálata után térjünk rá most szélsőértékeinek vizsgálatára.

3. Állítás. *Tegyük fel, hogy a (11) feltétel teljesül és $f'' > 0$. Ekkor $T'(c) = 0$ esetén fennáll $T''(c) < 0$, azaz T szélsőértéke csak maximum lehet.*

4. Állítás. *Tegyük fel, hogy a (11) feltétel teljesül és $f'' < 0$. Ekkor $T'(c) = 0$ esetén fennáll $T''(c) > 0$, azaz T szélsőértéke csak minimum lehet.*

Ezen állítások lehetővé teszik, hogy $n = 1$ esetén teljes leírást adjunk konvex és konkáv f esetén a megoldások számáról. Ehhez azonban még szükség van a T értelmezési tartományának és határértékeinek meghatározására. Ezekkel foglalkozunk a következő szakaszokban.

3.1.2. A "time-map" értelmezési tartománya

Az értelmezési tartomány meghatározásához célszerű bevezetni az $n = 1$ esethez tartozó Hamilton- függvényt

$$H(r) := \frac{u'(r)^2}{2} + F(u(r)), \tag{12}$$

ahol $F(u) := \int_0^u f$. Az $n > 1$ esetben ez Ljapunov-függvényként szolgál, ugyanis $H'(r) = -\frac{n-1}{r}u'^2(r) \leq 0$. Könnyen látható, hogy amennyiben az u függvénynek van gyöke, akkor $u'(r) < 0$ minden $r \in (0, R]$ esetén, ahol R jelöli az első gyököt. Ilyen esetben tehát fenn kell állnia az $u''(0) < 0$ egyenlőtlenségnek, amelyből $f(u(0)) > 0$ következik. Ezzel a következőt igazoltuk.

5. Állítás. *Ha $c \in D(T)$, akkor $f(c) > 0$.*

Könnyen kaphatunk ennél jobb feltételt is a Ljapunov függvény segítségével. Ugyanis $c \in D(T)$ esetén bármely $d \in (0, c)$ számhoz van olyan $r > 0$, melyre $u(r) = d$. Így

$$F(d) = F(u(r)) = H(r) - \frac{u'(r)^2}{2} < H(r) \leq H(0) = F(c),$$

amely az alábbit bizonyítja.

6. Állítás. *Ha $c \in D(T)$, akkor $F(c) > F(d)$ minden $d \in (0, c)$ számra.*

Az értelmezési tartományra tehát fennáll

$$D(T) \subset \{c > 0 \ : \ F(c) > F(d) \ \forall \ d \in (0, c) \text{ és } f(c) \neq 0\} =: \mathcal{P}_f. \tag{13}$$

Az $n = 1$ esetben pontosan megadható az értelmezési tartomány.

7. Állítás. *Ha $n = 1$, akkor $D(T) = \mathcal{P}_f$.*

A differenciálegyenletet r^{n-1}-gyel szorozva, majd integrálva

$$-r^{n-1}u'(r) = \int_0^r \rho^{n-1} f(u(\rho)) d\rho. \tag{14}$$

Ha f pozitív, akkor létezik olyan $r_1 > 0$ és $K > 0$, hogy minden $r > r_1$ esetén $u'(r) \leq -\frac{K}{r^{n-1}}$. Ezért ha $n \leq 2$, akkor u nem lehet minden $r > 0$ esetén pozitív, valahol eléri a nullát. Így az alábbit igazoltuk

8. Állítás. *Legyen $n \leq 2$. Ekkor, ha $f(u) > 0$ minden $u \in (0, +\infty)$ esetén, akkor $D(T) = (0, +\infty)$, azaz ekkor is teljesül $D(T) = \mathcal{P}_f$.*

Magasabb dimenzió esetén f pozitivitásából nem következik, hogy $D(T) = \mathcal{P}_f$. Erre a legegyszerűbb példa az $f(u) = u^p$ függvény $p \geq (n+2)/(n-2)$ esetén. Ekkor ugyanis $D(T) = \emptyset$ és $\mathcal{P}_f = (0, +\infty)$. Az előbbi bizonyítása az alábbi Pohozaev-azonosságon alapul [42].

$$r^n u'^2(r) + 2r^n F(u(r)) + (n-2)r^{n-1}u(r)u'(r) = \int_0^r s^{n-1}\left[2nF(u(s)) - (n-2)u(s)f(u(s))\right] \mathrm{d}s.$$

Ugyanis $p \geq (n+2)/(n-2)$ esetén a jobboldal nem pozitív, míg, ha az u függvénynek lenne gyöke, akkor ott a baloldal pozitív lenne.

A p kitevőre vonatkozó feltétel éppen a kritikus Szoboljev-kitevőt adja. Pohozsaev variációs módszerrel bebizonyította, hogy $p < (n+2)/(n-2)$ esetén van megoldása a peremérték-problémának, azaz ekkor $D(T) = \mathcal{P}_f$. Ha azonban az f függvényre fennáll $f(0) > 0$, akkor a (14) képlet segítségével, ha pedig az f függvényre lineáris alsó becslés adható, akkor a megfelelő lineáris egyenlettel való Sturm összehasonlítás segítségével megmutatható, hogy a megoldások elérik a nullát, azaz fennáll a következő.

9. Állítás. *Legyen $n \geq 1$, $\alpha \in (0, +\infty]$. Ha $f > 0$ a $(0, \alpha)$ intervallumban és $\liminf_{u \to 0} \frac{f(u)}{u} > 0$, akkor $(0, \alpha) \subset D(T)$. Következésképpen, ha $f(\alpha) = 0$, akkor $(0, \alpha)$ maximális részintervalluma $D(T)$-nek.*

3.1.3. A "time-map" határértékei az értelmezési tartomány határpontjaiban

Az alábbi állításokat a T határértékeiről, melyeket szintén Sturm típusú összehasonlítással lehet igazolni, az [56] dolgozatban bizonyítottuk.

10. Állítás. *Legyen $n \geq 1$, és $0 \in \partial D(T)$.*

(a) Ha $f(0) > 0$, akkor $\lim_0 T = 0$.

(b) Ha $f(0) = 0$ és $f'(0) > 0$, akkor $\lim_0 T \in (0, +\infty)$.

(c) Ha $f(0) = 0$ és $f'(0) = 0$, akkor $\lim_0 T = +\infty$.

11. Állítás. *Legyen $n = 1$, és $+\infty \in \partial D(T)$.*

(a) Ha $\lim_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{u} = +\infty$, akkor $\lim_{+\infty} T = 0$.

(b) Ha $\lim_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{u} = L \in (0, +\infty)$, akkor $\lim_{+\infty} T = \frac{\pi}{2\sqrt{L}}$.

(c) Ha $\lim_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{u} = 0$, akkor $\lim_{+\infty} T = +\infty$.

12. Állítás. *A 11. Állítás (c) része fennáll $n \geq 1$ esetén is.*

Az [54] dolgozatban igazoltuk a Pohozsaev-egyenlőtlenség felhasználásával, hogy a 11. Állítás *(a)* része fennáll $n \geq 1$ esetén is a szubkritikus esetben. Ezt fogalmazzuk meg a következő Állításban.

13. Állítás. *Tegyük fel, hogy $f(u) > 0$, ha $u > 0$, valamint létezik és véges a $\lim_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u^p}$ határérték, ha $1 < p < 2^*$, ahol $2^* = \frac{n+2}{n-2}$, ha $n > 2$, és $2^* = \infty$, ha $n \leq 2$. Ekkor létezik olyan $c_0 > 0$, melyre $(c_0, \infty) \subset D(T)$ és $\lim_{+\infty} T = 0$.*

3.2. A megoldások száma konvex f esetén

Ebben a szakaszban a konvex f függvényeket fogjuk osztályozni a "time-map" alakja szerint, azaz meghatározzuk, hogy R függvényében hány pozitív megoldása van a (3)-(4) peremérték-problémának. Az $n = 1$ esetben teljes osztályozást tudunk adni, azaz bármely konvex f függvény esetén meg tudjuk adni a pozitív megoldások pontos számát. Az $n > 1$ esetben is számos ismert eredményt kapunk meg egyszerűbb bizonyítással, ekkor azonban az osztályozás nem teljes. Mutatni fogunk olyan eseteket, amelyeknél a megoldások pontos számának kérdése még nyitott probléma. Az ebben a szakaszban szereplő eredmények nagyrészt az [56] dolgozatban jelentek meg.

A "time-map" alakját, amint a fejezet elején már említettük, három fontos tulajdonság jellemzi: az értelmezési tartomány, a monotonitás, és a határértékek. Amint látni fogjuk az osztályozás alapját a határértékek adják, amelyeket $f(0)$ előjele, valamint f végtelenbeli viselkedése határoz meg a 10. és 11. Állítás szerint.

Osztályozásunk első szintjét f végtelenbeli viselkedése adja. Eszerint háromféle függvényt különböztetünk meg:

- aszimptotikusan szuperlineáris ($\lim_{u\to+\infty} \frac{f(u)}{u} = +\infty$),
- aszimptotikusan lineáris ($\lim_{u\to+\infty} \frac{f(u)}{u} \in (0, +\infty)$) és
- aszimptotikusan szublineáris ($\lim_{u\to+\infty} \frac{f(u)}{u} \leq 0$).

Megjegyezzük, hogy f konvexitása miatt $\frac{f(u)}{u}$ monoton nagy u esetén, ezért a $\lim_{u\to+\infty} \frac{f(u)}{u}$ határérték létezik.

A legegyszerűbb eset a szublineáris, ekkor ugyanis a time-mapre vonatkozó fenti Állítások alapján tetszőleges dimenzióban teljes leírás adható a megoldások számáról, amelyet a következő Tételben fogalmazunk meg.

1. Tétel. *Legyen f konvex, aszimptotikusan szublineáris függvény, melyre $f(0) > 0$. Ekkor bármely $R > 0$ esetén a (3)-(4) peremérték-problémának pontosan egy megoldása van.*

Aszimptotikusan szuperlineáris és lineáris f esetén a teljes osztályozás csak $n = 1$ esetén ismert. Az osztályozás $f(0)$ előjele szerint történik. Az ezzel kapcsolatos eredményeinket foglalja össze a következő két tétel [56]. A tételek részben általánosíthatók az $n > 1$ esetre is, ezek az eredmények is az [56] dolgozatban olvashatók.

2. Tétel. *Legyen $n = 1$, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$ szigorúan konvex függvény, melyre $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{f(u)}{u} = +\infty$.*

(i) Ha $f(u) > 0$ $(u \in [0, \infty))$, akkor létezik olyan $R_{sup} > 0$, hogy a (3)-(4) peremérték-problémának $R < R_{sup}$ esetén két megoldása, $R = R_{sup}$ esetén egy megoldása van, $R > R_{sup}$ pedig nincs megoldása.

(ii) Ha $f(0) > 0$ és az f függvénynek van gyöke a $(0, \infty)$ intervallumban, akkor a (3)-(4) peremérték-problémának két megoldása van minden $R > 0$ esetén.

(iii) Ha $f(0) = 0$ és $f'(0) > 0$, akkor létezik olyan $R_{sup} > 0$, hogy a (3)-(4) peremérték-problémának egy megoldása van $R < R_{sup}$ esetén, és nincs megoldása, ha $R \geq R_{sup}$.

(iv) Ha $f(0) = 0$ és $f'(0) \leq 0$, akkor a (3)-(4) peremérték-problémának egy megoldása van minden $R > 0$ esetén.

(v) Ha $f(0) < 0$, akkor létezik olyan $R_{sup} > 0$, hogy a (3)-(4) peremérték-problémának egy megoldása van $R \leq R_{sup}$ esetén, és nincs megoldása, ha $R > R_{sup}$.

Tekintsük végül az aszimptotikusan lineáris esetet. Ekkor az előző Tételhez képest a lényeges változás, hogy $\lim_{+\infty} T = R_\infty$ a 11. Állításból következően.

3. Tétel. *Legyen $n = 1$, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$ szigorúan konvex függvény, melyre $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{f(u)}{u} = L \in (0, +\infty)$ és $R_\infty := \frac{\pi}{2\sqrt{L}}$.*

(i) Ha $f(u) > 0$ $(u \in [0, \infty))$, akkor létezik olyan $R_{sup} > R_\infty$, hogy a (3)-(4) peremérték-problémának $R \leq R_\infty$ és $R = R_{sup}$ esetén egy megoldása, és $R_\infty < R < R_{sup}$ esetén két megoldása van, $R > R_{sup}$ esetén pedig nincs megoldása.

(ii) Ha $f(0) > 0$ és f-nek van gyöke a $(0, \infty)$ intervallumban, akkor a (3)-(4) peremérték-problémának egy megoldása van $R \leq R_\infty$, és két megoldása van $R > R_\infty$ esetén.

(iii) Ha $f(0) = 0$ és $f'(0) > 0$, akkor létezik olyan $R_{sup} > R_\infty$, hogy a (3)-(4) peremérték-problémának nincs megoldása, ha $R \leq R_\infty$, egy megoldása van, ha $R_\infty < R < R_{sup}$, és nincs megoldása, ha $R \geq R_{sup}$.

(iv) Ha $f(0) = 0$ és $f'(0) \leq 0$, akkor a (3)-(4) peremérték-problémának nincs megoldása $R \leq R_\infty$ esetén, és egy megoldása van $R > R_\infty$ esetén.

(v) Ha $f(0) < 0$, akkor létezik olyan $R_{sup} > R_\infty$, hogy a (3)-(4) peremérték-problémának nincs megoldása, ha $R \leq R_\infty$, egy megoldása van, ha $R_\infty < R \leq R_{sup}$, és nincs megoldása, ha $R > R_{sup}$.

3.3. A megoldások száma szinguláris f esetén

Ebben a szakaszban ismertetjük az [54, 55, 61] dolgozatokban megjelent eredményeinket a (3)-(4) pozitív megoldásainak pontos számáról abban az esetben, amikor f a következő alakú.

- $f(u) = u^{-\alpha} + u^p$,
- $f(u) = u^p - u^{-\alpha}$,
- $f(u) = u^{-\alpha} - u^p$,

ahol $\alpha \in (0, 1)$ és $p > 0$ paraméter. (Az $f(u) = -u^{-\alpha} - u^p$ triviális eset azért marad ki, mert ekkor $f(u) < 0$, így nincs pozitív megoldás.)

Az $f(u) = u^p + u^{-\alpha}$ nemlinearitás és tetszőleges $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány esetén Hernandez és Mancebo, valamint Stuart igazolták [28, 48], hogy pontosan egy megoldás van, ha $0 < p < 1$. A $p > 1$ esetet Coclite és Palmieri vizsgálták [12]. Megmutatták, hogy létezik olyan R^*, hogy ha $R < R^*$, akkor létezik legalább egy megoldás, ha pedig $R > R^*$, akkor nincs megoldás. Ha az Ω tartomány gömb, akkor a szubkritikus $1 < p < (n + 2)/(n - 2)$ esetben igazoltuk [54], hogy $R < R^*$ esetén van legalább két megoldás. Az $n = 1$ speciális esetben pontosan két megoldás van (ekkor p-re csak a $p > 1$ feltételnek kell teljesülnie).

Az $f(u) = u^p - u^{-\alpha}$ esetet általános $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartományon tárgyalja Diaz dolgozata [14], a $p = 0$ esetben, valamint Zhang cikke [51] a $0 < p < 1$ esetben. Megmutatták, hogy gömb tartomány esetén létezik olyan R^*, hogy nincs megoldás $R < R^*$ esetén, és létezik legalább egy megoldás $R > R^*$ esetén. Az egy-dimenziós ($n = 1$) esetet $p = 0$ esetén Choi és munkatársai tanulmányozták [11]. Bebizonyították, hogy R bizonyos értékeinél két megoldás is lehet, valamint sejtéseket fogalmaztak meg a megoldások pontos számát illetően. A sejtéseket az [55] dolgozatban bebizonyítottuk, ezzel teljes leírást adtunk a megoldások pontos számáról. Igazoltuk, hogy az $1/2 \leq \alpha < 1$ esetben létezik olyan R^*, hogy ha $R < R^*$, akkor nincs megoldás, ha pedig $R > R^*$, akkor egy megoldás van. A $0 < \alpha < 1/2$ esetben azonban bonyolultabb a viselkedés. Ekkor létezik olyan $R_0 < R^*$, hogy ha $R < R_0$, akkor nincs megoldás, ha $R_0 < R < R^*$, akkor két megoldás van, végül ha $R > R^*$, akkor egy megoldás van. Ezt az eredményünket, amely a $p = 0$ esetre vonatkozik, általánosítottuk a $p \in (0, 1)$ esetre is [61]. Megmutattuk, hogy hasonló a bifurkációs struktúra, csak az $\alpha = 1/2$ helyett az $\alpha = (p + 1)/2$ értéknél jelenik meg a két megoldás. Abban a dolgozatban a $p > 1$ esetben is meghatároztuk a megoldások számát. Ekkor azonban egyszerűbb jelenséget tapasztalunk (és a bizonyítás is sokkal egyszerűbb), nevezetesen létezik olyan R^*, hogy ha $R < R^*$, akkor egy megoldás van, ha pedig $R > R^*$, akkor nincs megoldás.

Végül az $f(u) = u^{-\alpha} - u^p$ esetben a (3) egyenletben szereplő operátor monoton, így a megoldás minden $p > 0$ és tetszőleges $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tartomány esetén egyértelmű [28].

Megjegyezzük, hogy a gömbön a pozitív megoldások radiális szimmetriája nem ismert, ezért módszerünkkel nem biztos, hogy az összes megoldást megkapjuk. A továbbiakban csak a radiálisan szimmetrikus megoldások számával foglalkozunk. Az alábbiakban bemutatjuk az $n = 1$ esetben a teljes osztályozást. A "time-map" értelmezési tartományára és határértékeire vonatkozó állításaink a szinguláris nemlinearitás esetére is érvényesek. A monotonitásra vonatkozó eredményekhez a T leképezés deriválhatóságát külön be kell bizonyítani.

3.3.1. A megoldások száma $f(u) = u^{-\alpha} + u^p$ esetén

A megoldások számának meghatározásához felhasználjuk a T leképezés értelmezési tartományára, monotonitására, valamint határértékeire, a 3.1. szakaszban ismertetett eredményeket. Ezek segítségével igazolható, hogy a T grafikonjának háromféle alakja lehet, ezek az értekezés 2.4. ábráján láthatók. A T leképezés jellemzése a következő Tételt adja a (3)-(4) peremérték-probléma pozitív, radiálisan szimmetrikus megoldásainak számáról.

4. Tétel. *Legyen $f(u) = u^{-\alpha} + u^p$ és $\alpha \in (0, 1)$.*

1. *Legyen $n \geq 1$ és $p < 1$. Ekkor bármely $R > 0$ esetén a (3)-(4) peremérték-problémának pontosan egy pozitív radiálisan szimmetrikus megoldása van.*

2. *Legyen $n = 1$ és $p = 1$. Ekkor, ha $0 < R < \pi/2$, akkor egy pozitív megoldás van, ha pedig $R \geq \pi/2$, akkor nincs megoldás.*

3. *Legyen $n \geq 1$ és $1 < p < (n+2)/(n-2)$, ha $n > 2$. Ekkor létezik olyan $R_{max} > 0$, hogy legalább két megoldás van $R < R_{max}$ esetén, és nincs megoldás $R > R_{max}$ esetén. Továbbá, ha $n = 1$, akkor $R < R_{max}$ esetén pontosan két megoldás, $R = R_{max}$ esetén pedig egy megoldás van.*

Megjegyezzük, hogy a tétel 3. állítását az [54] dolgozatban az alábbi általánosabb függvényosztályra bizonyítottuk.

- $f(u) \geq m > 0 \quad (u > 0)$;
- A $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{f(u)}{u^p}$ határérték létezik és véges valamely $1 < p < 2^*$ esetén, ahol $2^* = \frac{n+2}{n-2}$, ha $n > 2$ és $2^* = \infty$ ha $n \leq 2$;
- Valamely $\alpha \in (0, 1)$ esetén
$$\limsup_{u\to 0} u^\alpha f(u) \in [0, \infty);$$
- f szigorúan konvex C^2 függvény.

3.3.2. A megoldások száma $f(u) = u^p - u^{-\alpha}$ és $n = 1$ esetén

Ebben az esetben a T függvényt jellemző Állítások nagy része nem alkalmazható $n > 1$ esetén, azért csak az $n = 1$ esettel foglalkozunk. A T értelmezési tartományára $D(T) = [c_{p,\alpha}, \infty)$ adódik, ahol
$$c_{p,\alpha} = \left(\frac{p+1}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{p+\alpha}}. \tag{15}$$

A 3.1. szakaszbeli eredmények alkalmazása során kiderül, hogy T grafikonjának alakját végülis $T'(c_{p,\alpha})$ előjele határozza meg. A $T'(c_{p,\alpha})$ előjelét a $p = 0$ esetben az [55] dolgozatban határoztuk meg, kiderült, hogy $\alpha < 1/2$ esetén negatív, $\alpha > 1/2$ esetén pedig pozitív. A $0 < p < 1$ esetben is sikerült pontos feltételt adni az előjelre a [61] cikkben, ezt fogalmazzuk meg az alábbi Lemmában, melynek bizonyítása a Γ-függvénnyel kapcsolatos azonosságok, valamint a Γ-függvény és a hipergeometrikus sor összefüggését felhasználó hosszadalmas számolás eredménye.

2. Lemma. *Legyen $n = 1$, $f(u) = u^p - u^{-\alpha}$ és $p \in (0, 1)$. Ha $2\alpha < p + 1$, akkor $T'(c_{p,\alpha}) < 0$. Ha $2\alpha > p + 1$, akkor $T'(c_{p,\alpha}) > 0$.*

A 3.1. szakaszbeli eredményeket és a fenti lemmát felhasználva igazolható, hogy a T grafikonjának négy különböző alakja lehet a p értékétől függően. A $p > 1$, $p = 1$, $2\alpha - 1 < p < 1$ és $0 < p \leq 2\alpha - 1$ esetekben a T grafikonja az értekezés 2.5. ábráján látható. A T leképezés jellemzése a következő Tételt adja a (3)-(4) peremérték-probléma pozitív, radiálisan szimmetrikus megoldásainak számáról.

5. Tétel. *Legyen $n = 1$, $f(u) = u^p - u^{-\alpha}$ és $\alpha \in (0, 1)$.*

1. *Ha $p > 1$, akkor létezik olyan $R_{max} > 0$, hogy a (3)-(4) peremérték-problémának pontosan egy pozitív megoldása van $R \leq R_{max}$ esetén, és nincs megoldása $R > R_{max}$ esetén.*

2. *Ha $p = 1$, akkor létezik olyan $R_{max} > 0$, hogy pontosan egy pozitív megoldás van $\pi/2 < R \leq R_{max}$ esetén, és nincs megoldás, ha $R > R_{max}$ vagy $R \leq \pi/2$.*

3. *Ha $2\alpha - 1 < p < 1$, akkor létezik olyan $R_{max} > 0$ és $0 < R_{min} < R_{max}$, hogy a megoldások száma nulla, $R < R_{min}$ esetén, egy $R = R_{min}$ esetén, kettő $R_{min} < R \leq R_{max}$ esetén, és egy $R > R_{max}$ esetén.*

4. *Ha $0 < p \leq 2\alpha - 1$, akkor létezik olyan $R_{min} > 0$, hogy pontosan egy pozitív megoldás van $R \geq R_{min}$ esetén, és nincs megoldás $R < R_{min}$ esetén.*

3.4. A megoldások stabilitása konvex és konkáv f esetén

Ebben a szakaszban a

$$\partial_t u = \Delta u + f(u) \tag{16}$$
$$h(x)u + g(x)\partial_\nu u = 0 \quad \partial\Omega\text{-án} \tag{17}$$

szemilineáris parabolikus egyenlet stacionárius megoldásainak stabilitását vizsgáljuk. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ korlátos, sima határú tartomány, f szigorúan konvex, vagy konkáv C^2 függvény a $[0, \infty)$ intervallumon, valamint h és g nemnegatív függvények, amelyek az Ω tartomány $\partial\Omega$ határán nem tűnnek el egyszerre. (Egy f függvényt szigorúan konvexnek (konkávnak) nevezünk, ha $f'' \geq 0$ ($f'' \leq 0$) és nem konstans egyetlen intervallumon sem.)

Shivaji és munkatársai igazolták [10, 37], hogy ha $f'' > 0$ és $f(0) \leq 0$, akkor a (16)-(17) feladat minden nem-triviális, nemnegatív megoldása instabilis. Először monoton növő függvényre bizonyították az állítást [10]. A nem monoton esetet először Tertikas [49] igazolta alsó és felső megoldások segítségével. Ezt a bizonyítást később Maya és Shivaji [37] egyszerűsítették, a monoton esetre való visszavezetéssel, az f függvényt felbontva egy monoton és egy lineáris függvény összegére. Az [57] dolgozatban a tételre közvetlen, egyszerű bizonyítást adtunk. Ez a bizonyítás nemcsak sokkal rövidebb, hanem rávilágít arra, hogy a stacionárius megoldás instabilitásának hátterében az f függvény konvexitása, és nem monotonitása áll. A bizonyítás módja egyben lehetőséget ad arra is, hogy a tétel konkáv függvényekre vonatkozó megfelelőjét is igazoljuk.

6. Tétel. *(i) Ha $f'' > 0$ és $f(0) \leq 0$, akkor (16)-(17) minden nem-triviális, nemnegatív stacionárius megoldása instabilis.*

(ii) Ha $f'' < 0$ és $f(0) \geq 0$, akkor (16)-(17) minden nem-triviális, nemnegatív stacionárius megoldása stabilis.

Megjegyezzük, hogy az $f(0)$ előjelére vonatkozó feltétel bizonyos értelemben szükséges. Ugyanis, ha Ω gömb, és nem teljesül az előjel feltétel, akkor tipikusan két pozitív stacionárius megoldás van, melyek különböző stabilitásúak.

A fenti tétel az alábbi általánosabb esetben is igaz. Legyen L egy általános elliptikus operátor:

$$Lu := -\text{div}\ (A(x)\nabla u)$$

ahol $A(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus, egyenletesen pozitív definit. Tekintsük az alábbi parabolikus feladatot.

$$\begin{aligned} \partial_t u &= Lu + f(x,u) &\quad (18)\\ h(x)u + g(x)\partial_{A\nu}u &= 0 \quad \partial\Omega\text{-án}\ , &\quad (19) \end{aligned}$$

ahol $\partial_{A\nu}u := A\nu \cdot \nabla u$ jelöli a konormális irányú deriváltat, és $u \mapsto f(x,u)$ szigorúan konvex vagy konkáv minden $x \in \Omega$ esetén. A 6. Tétel alábbi általánosítását az [57] dolgozatban bizonyítottuk.

7. Tétel. *(i) Ha $u \mapsto f(x,u)$ szigorúan konvex és $f(x,0) \leq 0$ minden $x \in \Omega$ esetén, akkor (18)-(19) minden nem-triviális, nemnegatív stacionárius megoldása instabilis.*

(ii) Ha $u \mapsto f(x,u)$ szigorúan konkáv és $f(x,0) \geq 0$ minden $x \in \Omega$ esetén, akkor (18)-(19) minden nem-triviális, nemnegatív stacionárius megoldása stabilis.

A bizonyítás egyszerű gondolata a tétel további általánosításaira is lehetőséget ad. Az [58] dolgozatban az elliptikus operátor helyett a kvázilineáris esetre, azaz p-Laplace operátorra, is bizonyítottuk az analóg tételt. Ezután késleltetést tartalmazó parciális differenciálegyenletre is kiterjesztettük az állítást [53].

3.5. Utazó hullámok stabilitása

Tekintsük most a (7) egyenlet $u(x,t) = U(x - ct)$ alakú utazó hullám megoldását. Az utazó hullámra vonatkozó (8) egyenlet autonóm, ezért, ha U egy megoldás, akkor ennek minden vízszintes eltoltja is az, azaz $U^*(y) = U(y + y_0)$ is megoldása a (8) egyenletnek tetszőleges $y_0 \in \mathbb{R}$ esetén. Ezért az utazó hullám stabilitását pálya stabilitásként célszerű definiálni (a periodikus pálya stabilitásához hasonlóan). Ebben az esetben a pályamenti aszimptotikus stabilitást szokták stabilitásnak nevezni.

1. Definíció. Az U utazó hullám *stabilis*, ha a (7) rendszer u megoldására, melyre $|u(0,x) - U(x)|$ elegendően kicsi minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, van olyan $x_0 \in \mathbb{R}$, amellyel $t \to \infty$ esetén

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(t,x) - U(x_0 + x - ct)| \to 0.$$

Az utazó hullám lokális stabilitását linearizálással lehet eldönteni. Ehhez helyettesítsük be a (7) egyenletbe az $u(t,x) = U(x-ct) + v(t, x-ct)$ függvényt. Az $f(U+v)$ helyére beírva az $f(U) + f'(U)v$ lineáris közelítést, valamint felhasználva a U függvényre vonatkozó (8) egyenletet a v függvényre az alábbi lineáris parabolikus egyenletet kapjuk.

$$\partial_t v = D\partial_{yy} v + c\partial_y v + f'(U(y))v. \tag{20}$$

Ekkor a következő két kérdés merül fel.

- Milyen feltételek mellet lesz a (20) egyenlet azonosan nulla megoldása stabilis?
- Következik-e ebből az utazó hullám stabilitása?

Az első kérdésre választ kaphatunk, ha a (20) lineáris egyenlet megoldását $v(t,y) = \exp(\lambda t)V(y)$ alakban keressük. Ekkor a V függvényre a

$$DV''(y) + cV'(y) + f'(U(y))V(y) = \lambda V(y) \tag{21}$$

egyenletet kapjuk. A fenti alakú v megoldások $\mathrm{Re}\lambda < 0$ esetén tartanak nullához $t \to +\infty$ mellett. Ezért várható, hogy a (20) lineáris egyenlet nulla megoldásának stabilitását az

$$(LV)(y) = DV''(y) + cV'(y) + f'(U(y))V(y), \tag{22}$$

$BUC(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m) \cap C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$ térben értelmezett másodrendű differenciáloperátor spektruma határozza meg. Fontos észrevennünk, hogy a 0 sajátértéke az operátornak az U' sajátfüggvénnyel. (Ez egyszerűen következik a (8) egyenlet differenciálásából.) Ez a tény egyébként összhangban van azzal, hogy az utazó hullám megoldás minden vízszintes eltoltja szintén utazó hullám. Így tehát, amint az utazó hullám a hagyományos értelemben nem lehet aszimptotikusan stabilis (csak pályamenti stabilitás várható), úgy a linearizálással kapott L operátor spektruma sem lehet teljes egészében a komplex sík baloldali részén, a 0 mindig sajátérték. A fent feltett kérdésekre végülis az alábbi tétel ad választ ([47] 25. Fejezet).

8. Tétel. *Ha 0 egyszeres sajátértéke az L operátornak, a többi sajátértékekre $Re\lambda < 0$, és van olyan $\beta < 0$, melyre $Re\lambda < \beta$ minden $\lambda \in \sigma_{ess}(L)$ esetén, akkor az U utazó hullám stabilis.*

Esetünkben a lényeges spektrumot az alábbi értelemben használjuk

$$\sigma_{ess}(L) := \{\lambda \in \sigma(L) \mid \lambda \text{ nem izolált sajátérték véges multiplicitással}\}.$$

3.5.1. A linearizálással kapott operátor spektruma

Vizsgáljuk most a $BUC(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m) \cap C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$ téren értelmezett

$$(LV)(y) = DV''(y) + cV'(y) + Q(y)V(y), \tag{23}$$

operátor spektrumát. Ezt az operátort az utazó hullám körüli linearizálással kaptuk, akkor $Q(y) = f'(U(y))$ volt. Most csak annyit teszünk fel a Q függvényről, hogy $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times m}$ folytonos, és a $Q^{\pm} = \lim_{y\to\pm\infty} Q(y)$ határértékek léteznek.

Célszerű bevezetni az $LV = \lambda V$ másodrendű egyenlethez tartozó elsőrendű rendszert. Legyen $X_1 = V$, $X_2 = V'$, ekkor az elsőrendű rendszer

$$X'(y) = A_\lambda X(y), \tag{24}$$

ahol

$$A_\lambda(y) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ D^{-1}(\lambda I - Q(y)) & -cD^{-1} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Mivel a Q függvénynek van határértéke $\pm\infty$-ben, azért léteznek az

$$A_\lambda^\pm = \lim_{y\to\pm\infty} A_\lambda(y)$$

határértékek is. Az $A_\lambda^\pm$ mátrixok stabil, instabil és centrális alterének dimenziója fontos szerepet fog játszani. Jelölje az A_λ^+ mátrix pozitív, negatív, illetve nulla valósrészű sajátértékeinek számát (multiplicitással számítva) $n_u^+(\lambda)$, $n_s^+(\lambda)$ és $n_c^+(\lambda)$. Hasonlóan definiáljuk az $n_u^-(\lambda)$, $n_s^-(\lambda)$, $n_c^-(\lambda)$ számokat az A_λ^- mátrixra. Ezek a számok tehát a megfelelő instabil, stabil és centrális alterek dimenziói.

Az alábbi tételt a [60] cikkben igazoltuk, a bizonyítás nem-autonóm lineáris egyenletek aszimptotikus viselkedését leíró tételeken alapul.

9. Tétel. *Tegyük fel, hogy az alábbi feltételek közül legalább az egyik teljesül:*

(a) $n_c^+(\lambda) > 0$ *és* $\int_0^{+\infty} |A_\lambda(y) - A_\lambda^+| < \infty$

(b) $n_c^-(\lambda) > 0$ *és* $\int_{-\infty}^0 |A_\lambda(y) - A_\lambda^-| < \infty$.

Ekkor $\lambda \in \sigma(L)$.

A továbbiakban tehát elég az $n_c^+(\lambda) = 0 = n_c^-(\lambda)$ esettel foglalkozni. Ebben az esetben exponenciális dichotómiák és perturbációs tételek segítségével az alábbi tétel igazolható, [13, 45].

10. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $n_c^+(\lambda) = 0 = n_c^-(\lambda)$.

- *Létezik olyan* $n_s^+(\lambda)$ *dimenziós* $E_s^+(\lambda) \subset \mathbf{C}^{2m}$ *altér, amelyből indítva a (24) rendszer megoldásait, azok végtelenben nullához tartanak.*
- *Létezik olyan* $n_u^-(\lambda)$ *dimenziós* $E_u^-(\lambda) \subset \mathbf{C}^{2m}$ *altér, amelyből indítva a (24) rendszer megoldásait, azok* $-\infty$*-ben nullához tartanak.*

Ha egy nem nulla kezdeti feltétel benne van az $E_s^+(\lambda)$ és az $E_u^-(\lambda)$ altérben is, akkor az abból induló megoldás $+\infty$-ben és $-\infty$-ben is nullához tart, így λ sajátérték, ha $\dim(E_s^+(\lambda) \cap E_u^-(\lambda)) > 0$. Exponenciális dichotómiák segítségével az alábbi tételt igazoltuk [60].

11. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $n_c^+(\lambda) = 0 = n_c^-(\lambda)$.

(i) A λ *szám pontosan akkor sajátértéke az* L *operátornak, ha* $\dim(E_s^+(\lambda) \cap E_u^-(\lambda)) > 0$.

(ii) A λ szám pontosan akkor reguláris értéke az L operátornak, ha $E_s^+(\lambda) \oplus E_u^-(\lambda) = \mathbb{C}^{2m}$.

Felhasználva, hogy $E_s^+(\lambda) \oplus E_u^-(\lambda) = \mathbb{C}^{2m}$ ekvivalens a $\dim E_s^+(\lambda) + \dim E_u^-(\lambda) = 2m$ és $\dim(E_s^+(\lambda) \cap E_u^-(\lambda)) = 0$ feltételekkel, egyszerűen adódik az alábbi következmény.

1. Következmény. *Tegyük fel, hogy $n_c^+(\lambda) = 0 = n_c^-(\lambda)$.*

1. *Ha $\dim E_s^+(\lambda) + \dim E_u^-(\lambda) > 2m$, akkor λ sajátértéke az L operátornak.*
2. *Ha $\dim E_s^+(\lambda) + \dim E_u^-(\lambda) < 2m$, akkor $\lambda \in \sigma(L)$.*
3. *Ha $\dim E_s^+(\lambda) + \dim E_u^-(\lambda) = 2m$ és $\dim(E_s^+(\lambda) \cap E_u^-(\lambda)) = 0$, akkor λ reguláris értéke az L operátornak.*
4. *Ha $\dim E_s^+(\lambda) + \dim E_u^-(\lambda) = 2m$ és $\dim(E_s^+(\lambda) \cap E_u^-(\lambda)) > 0$, akkor λ sajátértéke az L operátornak.*

1. Megjegyzés. Ha $n_c^+(\lambda) = 0 = n_c^-(\lambda)$, akkor az $L - \lambda I$ operátor Fredholm, és Fredholm indexe $\alpha(L - \lambda I) = \dim E_s^+(\lambda) + \dim E_u^-(\lambda) - 2m$, [27, 40].

3.5.2. Az Evans-függvény

Az $E_s^+(\lambda)$ és $E_u^-(\lambda)$ alterek dimenziója explicit módon meghatározható, hiszen ezekhez csak az $A_\lambda^\pm$ mátrixok sajátértékei valósrészének előjelét kell kiszámítani. Azonban $\dim(E_s^+(\lambda) \cap E_u^-(\lambda))$ meghatározásához a (24) differenciálegyenlet rendszert kell megoldani, amely kivételes esetektől eltekintve, nem állandó együtthatós, így csak numerikusan lehet a megoldását előállítani. Ez vezet az Evans-függvény definíciójához [21]. Legyen

$$\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ n_c^+(\lambda) = 0 = n_c^-(\lambda),\ n_s^+(\lambda) \neq 0 \neq n_u^-(\lambda),\ \text{és } n_s^+(\lambda) + n_u^-(\lambda) = 2m\}.$$

Adott $\lambda \in \Omega$ számra jelölje az $E_s^+(\lambda)$ altér egy bázisát $v_1^+, \ldots, v_{n_s^+}^+$, az $E_u^-(\lambda)$ altér egy bázisát pedig $v_1^-, \ldots, v_{n_u^-}^-$. Ekkor $\dim(E_s^+(\lambda) \cap E_u^-(\lambda)) > 0$ éppen azt jelenti, hogy a két bázis lineárisan összefüggő. Az Evans-függvényt ezen $2m$ vektor által meghatározott determinánsként definiáljuk. Ez a determináns tehát pontosan akkor nulla, ha λ sajátértéke az L operátornak.

2. Definíció. Az L operátorhoz tartozó (egy) Evans-függvény $\mathcal{D} : \Omega \to \mathbb{C}$

$$\mathcal{D}(\lambda) = \det\left(v_1^+ \ldots v_{n_s^+}^+ v_1^- \ldots v_{n_u^-}^-\right)$$

Láttuk, hogy az Evans-függvény zérushelyei éppen az operátor sajátértékei. Ez a tulajdonság független a definícióban szereplő bázisok választásától. Megmutatható, hogy a bázisok megfelelő választása mellett az Evans-függvény analitikus az Ω tartományon, és a sajátértékek multiplicitása megegyezik az Evans-függvény gyökeinek multiplicitásával [1]. Az analitikusság miatt a $\mathcal{D}$ gyökei izoláltak, tehát a $\dim E_s^+(\lambda) + \dim E_u^-(\lambda) = 2m$ tartományban csak izolált sajátértékei lehetnek az operátornak. Így az 1. Következmény felhasználásával az L operátor lényeges spektrumát az alábbi módon tudjuk explicit módon meghatározni [60].

2. Következmény. *Az L operátor lényeges spektruma*

$$\sigma_{ess}(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ n_c^+(\lambda) > 0 \ \textit{vagy} \ n_c^-(\lambda) > 0 \ \textit{vagy} \ n_s^+(\lambda) + n_u^-(\lambda) \neq 2m\}.$$

Összefoglalva az eddigieket, az L operátor spektrumát a következőképpen lehet meghatározni.

- A lényeges spektrum explicit módon kiszámítható az $A_\lambda^\pm$ mátrixok sajátértékei valósrésze előjelének kiszámításával a 2. Következmény felhasználásával.
- Az izolált sajátértékeket az Evans-függvény gyökei adják, ezeket azonban csak numerikusan lehet meghatározni, mivel az Evans-függvény értékeit csak a (24) nem állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldásával lehet kiszámítani. Az Evans-függvény kiszámításának numerikus nehézségeivel a [62, 63] dolgozatokban foglalkoztunk.

4. Hálózati folyamatokkal kapcsolatos új eredmények

Tekintsünk egy N csúcsú, irányítatlan, hurokélmentes gráfot, amelyen SIS típusú járványterjedést fogunk vizsgálni, azaz a gráf csúcsai kétféle állapotban, fertőző (I), illetve egészséges (S), lehetnek. A gráf egy csúcsának állapota kétféleképpen változhat: egy I típusú csúcs adott valószínűséggel meggyógyul, azaz S típusú lesz, illetve egy S típusú csúcsot az I típusú szomszédai valamilyen valószínűséggel megfertőznek és maga is I típusú lesz. A gráf összes lehetséges állapotainak 2^N elemű halmaza alkotja az állapotteret, melyen a fenti átmenetek egy Markov-láncot határoznak meg. A fertőzési rátát szokásos módon τ, a gyógyulási rátát pedig γ fogja jelölni. A továbbiakban először ezen Markov-lánc alapegyenletét fogjuk felírni tetszőleges gráf esetén. A gráf tetszőleges voltát azért hangsúlyozzuk, mert az irodalomban csak speciális gráfok esetén írták fel az alapegyenletet, tetszőleges gráfra az alapegyenletet a [65] dolgozatban adtuk meg.

4.1. Alapegyenletek SIS dinamika és tetszőleges gráf esetén

Egy adott időpontban minden csúcs egészséges (S) vagy fertőző (I), ezért a rendszer állapota egy N hosszúságú vektorral adható meg, melynek minden eleme S vagy I. Így a Markov-lánc állapottere az $\mathcal{S} = \{S, I\}^N$ vagy $\mathcal{S} = \{0, 1\}^N$, 2^N elemet tartalmazó halmaz. A rendszer dinamikáját az átmenet mátrix határozza meg, amely azt adja meg, hogy az egyes állapotokból milyen valószínűséggel jut a rendszer egységnyi idő alatt egy másik állapotba. A folyamatot folytonos idejűnek tekintve az átmenet mátrix segítségével felírható az alapegyenlet, amely egy lineáris differenciálegyenlet-rendszer az egyes állapotok valószínűségeire. Ennek felírásához először célszerű a 2^N elemet tartalmazó állapotteret a következő $N+1$ részhalmazra felbontani. Legyen $\mathcal{S}^0$ az az állapot, amelyben minden csúcs S típusú, azaz $\mathcal{S}^0 = (S, S, \ldots, S)$. Jelölje $\mathcal{S}^k$ azon állapotok halmazát, amelyekben k darab I típusú csúcs van. Az $\mathcal{S}^k$ részhalmazban tehát $\binom{N}{k}$ állapot van. Végül jelölje $\mathcal{S}^N$ a csupa I csúcsból álló állapotot, azaz $\mathcal{S}^N = (I, I, \ldots, I)$. Az $\mathcal{S}^k$ részhalmaz elemeit jelölje $\mathcal{S}_1^k, \mathcal{S}_2^k, \ldots, \mathcal{S}_{c_k}^k$, ahol $c_k = \binom{N}{k}$. Az $\mathcal{S}_j^k$ állapotban az l-edik csúcs típusát jelölje $\mathcal{S}_j^k(l)$, tehát $\mathcal{S}_j^k(l) = S$, vagy $\mathcal{S}_j^k(l) = I$. Amint fent említettük, a rendszer állapota kétféleképpen változhat.

- *Fertőzés:* Egy S csúcs I típusú lesz, ami $\mathcal{S}_j^k \to \mathcal{S}_i^{k+1}$ típusú átmenet, ahol j és i olyanok, hogy $\exists\ l$, amelyre $\mathcal{S}_j^k(l) = S$, $\mathcal{S}_i^{k+1}(l) = I$, és $\mathcal{S}_j^k(m) = \mathcal{S}_i^{k+1}(m)\ \forall\ m \neq l$. Továbbá $\exists\ r \neq l$, amelyre $\mathcal{S}_j^k(r) = I$ és $g_{lr} = 1$ (azaz van (S, I) típusú él az l és r csúcs között).
- *Gyógyulás:* Egy I csúcs S típusú lesz, ami $\mathcal{S}_j^k \to \mathcal{S}_i^{k-1}$ típusú átmenet, ahol j és i olyanok, hogy $\exists\ l$, amelyre $\mathcal{S}_j^k(l) = I$, $\mathcal{S}_i^{k-1}(l) = S$, és $\mathcal{S}_j^k(m) = \mathcal{S}_i^{k-1}(m)\ \forall\ m \neq l$. Ez azt jelenti, hogy az $\mathcal{S}_j^k$ és $\mathcal{S}_i^{k-1}$ állapotok csak egy csúcsnál, nevezetesen az l-edik csúcsnál különböznek.

A folyamatot egy folytonos idejű Markov-lánccal fogjuk leírni. Jelölje $X_j^k(t)$ annak valószínűségét, hogy a t időpontban a rendszer az $\mathcal{S}_j^k$ állapotban van. Legyen

$$X^k(t) = (X_1^k(t), X_2^k(t), \dots, X_{c_k}^k(t))$$

a k beteget tartalmazó állapotok valószínűségeit tartalmazó c_k-dimenziós vektor, $k = 0, 1, \dots, N$. A fenti átmenetek az $X_j^k(t)$ függvényekre egy lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszert határoznak meg, ezt fogjuk alapegyenletnek, vagy master egyenletnek nevezni. Mivel az átmenetek során a fertőző csúcsok száma legfeljebb eggyel változhat, azért az alapegyenlet az alábbi blokk-tridiagonális alakba írható.

$$\dot{X}^k = A^k X^{k-1} + B^k X^k + C^k X^{k+1}, \qquad k = 0, 1, \dots, N, \tag{26}$$

ahol A^0 és C^N zérus mátrixok. A fenti egyenlet mátrix alakja

$$\dot{X} = PX,$$

ahol

$$P = \begin{pmatrix} B^0 & C^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A^1 & B^1 & C^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^2 & B^2 & C^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^3 & B^3 & C^3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & A^N & B^N \end{pmatrix}.$$

Az A^k mátrixok írják le a fertőzés, a C^k mátrixok pedig a gyógyulás folyamatát. A hálózat szerkezete az A^k mátrixokban tükröződik. Ezen mátrixok elemeit az alábbi módon lehet meghatározni. Jelölje $A_{i,j}^k$ az A^k mátrix i-edik sorának j-edik elemét. Ez a szám adja meg az $\mathcal{S}_j^{k-1}$ állapotból az $\mathcal{S}_i^k$ állapotba történő átmenet rátáját. Az $\mathcal{S}^{k-1}$ osztálynak c_{k-1}, az $\mathcal{S}^k$ osztálynak pedig c_k eleme van, ezért az A^k mátrixnak c_k sora és c_{k-1} oszlopa van. Az $A_{i,j}^k$ elem pontosan akkor nem nulla, ha az $\mathcal{S}_j^{k-1}$ és $\mathcal{S}_i^k$ állapotok csak egy csúcsban térnek el egymástól, legyen ez az l-edik csúcs, és fennáll $\mathcal{S}_j^{k-1}(l) = S$, $\mathcal{S}_i^k(l) = I$, valamint $\mathcal{S}_j^{k-1}(m) = \mathcal{S}_i^k(m)$ minden $m \neq l$ esetén. Továbbá léteznie kell olyan $r \neq l$ számnak, amelyre $\mathcal{S}_j^{k-1}(r) = I$ és $g_{lr} = 1$ (azaz az l-edik és r-edik csúcsot egy (S, I) él köti össze). Ebben az esetben

$$A_{i,j}^k = \tau \cdot \#\{r \in \{1, 2, \ldots, N\} : \mathcal{S}_j^{k-1}(r) = I, g_{lr} = 1\}. \tag{27}$$

Jelölje $C_{i,j}^k$ a C^k mátrix i-edik sorának j-edik elemét. Ez a szám adja meg az $\mathcal{S}_j^{k+1}$ állapotból az $\mathcal{S}_i^k$ állapotba történő átmenet rátáját. Az $\mathcal{S}^{k+1}$ osztálynak c_{k+1}, az $\mathcal{S}^k$ osztálynak pedig c_k eleme van, ezért a C^k mátrixnak c_k sora és c_{k+1} oszlopa van. A $C_{i,j}^k$ elem pontosan akkor nem nulla, ha az $\mathcal{S}_j^{k+1}$ és $\mathcal{S}_i^k$ állapotok csak egy csúcsban térnek el egymástól, legyen ez az l-edik csúcs, és fennáll $\mathcal{S}_j^{k+1}(l) = I$, $\mathcal{S}_i^k(l) = S$, valamint $\mathcal{S}_j^{k+1}(m) = \mathcal{S}_i^k(m)$ minden $m \neq l$ esetén. Ebben az esetben $C_{i,j}^k = \gamma$.

A B^k mátrixok diagonálisak c_k darab sorral és oszloppal. Ugyanis a B^k mátrix elemei az $\mathcal{S}_i^k \to \mathcal{S}_j^k$ típusú átmenetek rátáit adják meg, ezek viszont csak abban az esetben nem nullák, ha $i = j$. A B^k mátrix átlójában szereplő elemeket az határozza meg, hogy a P mátrix minden oszlopában az elemek összege nulla. Így az átló elemeire a következőt kapjuk

$$B_{i,i}^k = -\sum_{j=1}^{c_{k+1}} A_{j,i}^{k+1} - \sum_{j=1}^{c_{k-1}} C_{j,i}^{k-1}. \tag{28}$$

4.2. Az alapegyenletek egyszerűsítése összevonással

Megfelelő tulajdonságú, nagyméretű lineáris közönséges differenciálegyenlet-rendszerekből úgynevezett összevonással (lumping) előállítható olyan kisebb méretű lineáris rendszer, amelynek megoldása az eredeti nagyméretű rendszer megoldásairól is szolgáltat információt. A továbbiakban megmutatjuk, hogy ez alkalmazható az alapegyenletre, amennyiben a gráf automorfizmuscsoportja kellően nagy. Látni fogjuk, hogy ilyen gráfoknál az egyenletek száma 2^N-ről akár $O(N)$-re, vagy $O(N^k)$-ra csökkenthető. Ezeket az eredményeinket a [65] dolgozatunk tartalmazza. Mielőtt az összevonást a (26) blokk-tridiagonális mátrixszal megadott lineáris rendszerre alkalmaznánk, ismertetjük az összevonás módszerét általános lineáris differenciálegyenlet esetén.

4.2.1. Lineáris differenciálegyenletek összevonása

Legyen A egy tetszőleges $n \times n$ méretű mátrix, és tekintsük az $\dot{X} = AX$ lineáris differenciálegyenlet-rendszert.

3. Definíció. Az $\dot{X} = AX$ lineáris rendszert összevonhatónak nevezzük, ha megadható az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz olyan $\{L_1, L_2, \ldots, L_m\}$ partíciója, amely rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal. Az $\{1, 2, \ldots, m\}$ halmaz bármely j és l eleméhez van olyan B_{jl} szám, melyre

$$B_{jl} = \sum_{i \in L_j} A_{ir}, \forall\ r \in L_l,$$

azaz a fenti összeg nem függ r választásától, amennyiben $r \in L_l$. Az $m \times m$-es B mátrixot nevezzük az A mátrix összevonásának, és az $\dot{Y} = BY$ lineáris differenciálegyenletet az eredeti $\dot{X} = AX$ rendszer összevonásának.

A rendszer összevonhatóságát jellemzi az alábbi Állítás.

14. Állítás. *Ha a B mátrix az A összevonásával keletkezett, akkor megadható olyan $m \times n$ méretű T mátrix, melyre $TA = BT$.*

A mátrix összevonhatósága a következő módon vonja maga után a differenciálegyenlet-rendszer összevonhatóságát.

15. Állítás. *Legyen B az $n \times n$ méretű A mátrix összevonásával keletkezett $m \times m$-es mátrix, és legyen T az a mátrix, amelyre fennáll $TA = BT$. A T mátrix segítségével vezessük be az eredeti X vektor m dimenziós összevonását a következőképpen: $Y = TX$. Ekkor a $t \mapsto Y(t)$ függvény teljesíti az $\dot{Y} = BY$ lineáris differenciálegyenletet.*

A lineáris rendszer összevonásához tehát a fázistér egy 3. Definíciónak megfelelő partícióját kell megadni. A partíció ismeretében egyszerűen előállítható a T mátrix, majd annak segítségével az összevont rendszer B mátrixa. Azonban a megfelelő partíció meghatározása általánosságban igen nehéz feladat. A következő szakaszban visszatérünk az SIS típusú dinamikával tetszőleges gráfra felírt alapegyenlet P mátrixának összevonhatóságához. Ekkor tehát egy tetszőleges A mátrix összevonása helyett a speciális szerkezetű P mátrix összevonásáról lesz szó. Megmutatjuk, hogy a megfelelő partíció hogyan állítható elő a gráf automorfizmuscsoportjának ismeretében.

4.2.2. Az SIS dinamikához tartozó alapegyenlet összevonása a gráf automorfizmusainak segítségével

Tekintsük ismét az (26) lineáris rendszert, amelyben a P mátrix blokk-tridiagonális struktúrájú. Erre a rendszerre fogjuk most alkalmazni az összevonás előző szakaszban ismertetett általános módszerét, kihasználva a mátrix blokk-tridiagonális struktúráját. Induljunk ki a fázistér speciális felépítéséből. Az előző szakaszban a fázistér általánosan az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz volt. Az SIS dinamika és N csúcsú gráf esetén a fázistér 2^N elemű, azonban az $\{1, 2, \ldots, 2^N\}$ halmaz helyett tekintsük a 4.1 szakasz elején bevezetett $\mathcal{S}$ halmazt fázistérnek. Ugyanis ezt a halmazt az I csúcsok száma szerint elő lehet állítani $\mathcal{S} = \cup \mathcal{S}^k$ alakban, amely felbontást célszerű az összevonás során is megőrizni, azért, hogy az összevonás után is meg lehessen határozni az I típusú csúcsok számának várható értékét. Mivel számunkra ennek meghatározása az egyik cél, azért a továbbiakban csak olyan összevonásokat tekintünk megengedettnek, amelyek megőrzik az I típusú csúcsok számát. Ez azt jelenti, hogy a partíciót csak úgy lehet megválasztani, hogy egy osztályba csak olyan állapotok kerülhetnek, amelyekben az I csúcsok száma azonos. Ezt fejezi ki a következő definíció.

4. Definíció. Az (26) lineáris rendszer (illetve a megfelelő Markov-lánc) összevonható, ha az $\mathcal{S}$ fázistérnek van olyan $\{L_1, L_2, \ldots, L_m\}$ partíciója, amely rendelkezik az alábbi két tulajdonsággal.

1. Bármely l számhoz létezik olyan k, amelyre $L_l \subset \mathcal{S}^k$.

2. Bármely $j, l \in \{1, 2, \ldots, m\}$ számokhoz van olyan Q_{jl}, amelyre

$$Q_{jl} = \sum_{i \in L_j} P_{ir}, \ \forall \ r \in L_l, \tag{29}$$

azaz a fenti összeg nem függ r választásától, amennyiben $r \in L_l$.

Az $m \times m$ méretű Q mátrixot nevezzük a P összevonásának.

Megjegyezzük, hogy a Definíció első részében az eredeti rendszer fázisterének az $\mathcal{S}$ halmazt tekintjük, a második részben viszont a fázisteret az $\{1, 2, \ldots, 2^N\}$ halmazzal azonosítjuk. Ezen kettősség elkerülése érdekében célszerű a partíció osztályaira az alábbi jelölést használni. Azokat az osztályokat, amelyek az $\mathcal{S}^k$ részhalmazai jelölje $L_1^k, L_2^k, \ldots, L_{l_k}^k$. Ekkor fenn kell állnia annak, hogy $\mathcal{S}^k = L_1^k \cup L_2^k \cup \ldots \cup L_{l_k}^k$, és a partícióban az összes osztályok száma $m = l_0 + l_1 + \ldots + l_N$. Érdemes megemlíteni, hogy mindig fennáll $l_0 = l_N = 1$, mivel az $\mathcal{S}^0$ és $\mathcal{S}^N$ részhalmazok egy eleműek. Az osztályok ezen új jelölésével a Definíció első része automatikusan teljesül, a második rész pedig az A^k és C^k mátrixok segítségével az alábbi módon fejezhető ki.

3. Lemma. *Az (26) lineáris rendszer összevonható, ha minden $k \in \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ esetén megadható az $\mathcal{S}^k$ halmaz olyan $L_1^k, L_2^k, \ldots, L_{l_k}^k$ partíciója, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal.*

Bármely $p \in \{1, 2, \ldots, l_{k-1}\}$ és $r \in \{1, 2, \ldots, l_k\}$ esetén létezik olyan $\overline{A}_{rp}^k$ szám, amelyre

$$\overline{A}_{rp}^k = \sum_{\mathcal{S}_i^k \in L_r^k} A_{ij}^k, \ \forall\, \mathcal{S}_j^{k-1} \in L_p^{k-1}, \tag{30}$$

azaz a fenti összeg független j-től, amennyiben $\mathcal{S}_j^{k-1} \in L_p^{k-1}$.

Bármely $p \in \{1, 2, \ldots, l_{k+1}\}$ és $r \in \{1, 2, \ldots, l_k\}$ esetén létezik olyan $\overline{C}_{rp}^k$ szám, amelyre

$$\overline{C}_{rp}^k = \sum_{\mathcal{S}_i^k \in L_r^k} C_{ij}^k, \ \forall\, \mathcal{S}_j^{k+1} \in L_p^{k+1}, \tag{31}$$

azaz a fenti összeg független j-től, amennyiben $\mathcal{S}_j^{k+1} \in L_p^{k+1}$.

Fő eredményünk ismertetése előtt emlékeztetünk a gráf automorfizmus és a gráf automorfizmuscsoportjának definíciójára.

5. Definíció. Legyen $G = G(V, E)$ egy gráf, melynek csúcshalmazát $V(G)$, élhalmazát $E(G)$ jelöli. Egy $\Phi : V(G) \to V(G)$ bijekciót a gráf automorfizmusának nevezünk, ha $xy \in E(G)$ pontosan akkor áll fenn, ha $\Phi(x)\Phi(y) \in E(G)$. A gráf összes automorfizmusainak halmazát a kompozícióval, mint művelettel ellátva, a gráf automorfizmuscsoportjának nevezzük, és $Aut(G)$-vel jelöljük.

Esetünkben a gráf csúcsai színezettek, azaz S vagy I típusúak lehetnek. A gráf automorfizmusnak a színezést is meg kell őriznie, azaz bármely $x, y \in V(G)$ esetén az x és $\Phi(x)$ csúcsnak, illetve az y és $\Phi(y)$ csúcsnak ugyanolyan típusúnak kell lennie. Azt mondjuk, hogy a Φ automorfizmus az $\mathcal{S}_i^k$ állapotot az $\mathcal{S}_j^k$ állapotba viszi, ha $\mathcal{S}_i^k(l) = \mathcal{S}_j^k(\Phi(l))$ minden $l \in \{1, 2, \ldots, N\}$ esetén. Most meg tudjuk fogalmazni fő eredményünket, amely a gráf automorfizmuscsoportját összeköti a Markov-lánc összevonhatóságával.

12. Tétel. *Vezessük be az $\mathcal{S}$ állapottérben az alábbi ekvivalenciarelációt. Az $\mathcal{S}_i^k$ és $\mathcal{S}_j^k$ állapotok ekvivalensek, ha a gráfnak van olyan automorfizmusa, amely az egyiket a másikba viszi. Ezen ekvivalenciareláció osztályai a (26) rendszer összevonását adják.*

Néhány gráftípus esetén megmutattuk a fenti általános tétel alkalmazhatóságát, szemléltetve ezzel azt, hogy a gráf szerkezetének ismeretében hogyan csökkenthető az alapegyenlet-rendszer mérete.

Teljes gráf esetén a 2^N-dimenziós (26) egyenletrendszer összevonható $N+1$-dimenziós rendszerré. Ekkor ugyanis az automorfizmuscsoport az $\mathbf{S_N}$ permutációcsoport, ezért az $\mathcal{S}^l$ halmazhoz tartozó bármely két állapot között megadható automorfizmus. Ez azt jelenti, hogy két olyan állapot, melyekben azonos számú I csúcs van, azonos osztályban vannak. Így összesen $N+1$ osztály keletkezik az összevonás után, az I csúcsok száma szerint, ezek tehát: $L_l = \mathcal{S}^l$, $l \in \{0, 1, \ldots, N\}$.

Egy N csúcsú csillag gráf esetében, amelyben egy központi csúcs össze van kötve a többi csúccsal, azok között pedig nincs él, az automorfizmuscsoport az $\mathbf{S_{N-1}}$ permutációcsoport. Ekkor a 2^N-dimenziós (26) egyenletrendszer egy $2N$-dimenziós rendszerré vonható össze.

Tekintsük most egy úgynevezett háztartás típusú gráfot (az ilyen gráfoknak a járványterjedés szempontjából különös jelentőségük van), amelyben minden háztartásban egy olyan csúcs van, amelynek van összeköttetése más háztartásokkal, ezt nevezzük a háztartás külső csúcsának, a többi csúcsokat, amelyek tehát csak a háztartás többi csúcsával vannak összekötve, belső csúcsoknak hívjuk. Az összevonás szempontjából legegyszerűbb esetet fogjuk vizsgálni, amelyben minden külső csúcs össze van kötve egymással, és a háztartások mindössze két eleműek, tehát egy külső és egy belső csúcsból állnak. A külső csúcsok tehát egy $N/2$ csúcsú (N páros szám) teljes gráfot alkotnak, és mindegyik egy belső csúcshoz kapcsolódik ezen kívül, tehát fokszámuk $N/2$. A belső csúcsok csak a nekik megfelelő külső csúcshoz kapcsolódnak, így fokszámuk 1. Ekkor gráf automorfizmuscsoportja $\mathbf{S_{N/2}}$. Megmutatható, hogy ebben az esetben a 2^N-dimenziós (26) egyenletrendszer összevonható egy $\binom{N/2+3}{3}$-dimenziós rendszerré. Hasonlóan igazolható, hogy ha n darab k csúcsból álló háztartás van (ekkor $N = nk$), akkor az összevonással kapott rendszer $\binom{n+2k-1}{2k-1}$ egyenletből áll.

Tekintsünk egy N csúcsú körgráfot, amelyben minden csúcs a két szomszédjával van összekötve. A körgráf automorfizmuscsoportja a D_N diédercsoport, melyben N forgatás és N tükrözés van. Mivel ez a csoport mindössze $2N$ elemű, azért a partíció minden osztályában legfeljebb $2N$ elem lehet, így az összevonás során legalább $2^N/(2N)$ osztályt kapunk, tehát összevonással a feladatot nem lehet polinomiális méretűre redukálni. Viszonylag kis csúcsszám esetén azonban az összevonás jelentős egyszerűsítést jelenthet. Egyszerűen igazolható, hogy $N = 5$ esetén a $2^5 = 32$ egyenletből álló alapegyenlet 8 egyenletre redukálható az összevonás segítségével. Az $N = 6$ és $N = 7$ csúcsú körgráf esetén a 64, illetve 128 egyenletből az összevonás után 13, illetve 18 egyenletet kapunk. Az összevont rendszer méretét úgy kaphatjuk meg, hogy az egyes állapotokra alkalmazzuk az összes automorfizmust, és megállapítjuk a kapott osztályok elemszámát. Ha a gráf csúcsszáma prímszám, $N = p$, akkor igazolható, hogy az osztályok száma $(2^{p-1}-1)/p+2^{(p-1)/2}+1$. Ha a gráf csúcsainak száma nem prím, akkor az összevonással kapott rendszer egyenleteinek száma nem ismert.

4.3. Várható értékekre vonatkozó egyenletek

Ebben a szakaszban a 2^N egyenletből álló (26) rendszer egyszerűsítésének egy másik módját az ún. mean-field típusú, azaz átlagolt egyenletek levezetését tárgyaljuk. Ezek létjogosultságát többek között az is indokolja, hogy a 2^N egyenletből álló teljes rendszer megoldása, az összes lehetséges állapot valószínűségének időbeli változását adná meg, amelyre valójában nincs szükség. Az elsődlegesen érdekes mennyiség az I, illetve S típusú csúcsok számának várható értéke

$$[I](t) = \sum_{k=0}^{N} k \sum_{j=1}^{c_k} X_j^k(t), \qquad [S](t) = \sum_{k=0}^{N} (N-k) \sum_{j=1}^{c_k} X_j^k(t), \tag{32}$$

ahol rövidség kedvéért ismét a $c_k = \binom{N}{k}$ jelölést használtuk. A mean-field típusú, azaz átlagolt egyenletek első fajtája ezen várható értékekre vonatkozó differenciálegyenlet. Ebben az egyenletben, mint látni fogjuk, megjelenik az SI típusú élek számának várható értéke

$$[SI] = \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=1}^{c_k} N_{SI}(\mathcal{S}_j^k) X_j^k(t), \tag{33}$$

ahol $N_{SI}(\mathcal{S}_j^{k-1})$ jelöli az $\mathcal{S}_j^{k-1}$ állapotban az (S,I) élek számát. Az átlagolással kapott egyenletek másik fajtája az I és S csúcsok számának várható értékén kívül bizonyos típusú élek számának várható értékére vonatkozó differenciálegyenleteket is tartalmaz. Az első típusba tartozókat a csúcsok szintjén felírt differenciálegyenleteknek nevezzük, a másodikhoz tartozókat pedig párok, vagy élek szintjén felírt egyenleteknek. Az irodalomban mindkét típusú mean-field egyenlet ismert [29, 33, 43], azonban ezeket valószínűségszámítási megfontolásokból vezették le, és általánosan elfogadott volt, hogy csak bizonyos gráf típusok esetén érvényesek, nevezetesen olyanok esetében, amelyekre az adott valószínűségszámítási érvelés érvényes. A [65, 66] dolgozatokban megmutattuk, hogy mind a csúcsokra, mind az élekre felírt átlagolt egyenlet tetszőleges gráf esetén érvényes, ugyanis az általános (26) alapegyenletből levezethető. A továbbiakban először a csúcsokra, majd az élekre vonatkozó átlagolt egyenletet ismertetjük.

Az $[I](t)$, illetve $[S](t)$ várható értékre vonatkozó differenciálegyenlet levezetése azon alapszik, hogy ezek az egyes állapotok, (26) rendszerben szereplő $X_j^k(t)$ valószínűségeinek lineáris kombinációi. A (32) képletben szereplő függvényeket deriválva majd a (26) differenciálegyenletet felhasználva az $[I](t)$, illetve $[S](t)$ függvényekre az alábbi differenciálegyenleteket lehet levezetni.

13. Tétel. *Az $[I](t)$ és $[S](t)$ várható értékek teljesítik az alábbi differenciálegyenleteket*

$$\dot{[S]} = \gamma[I] - \tau[SI], \tag{34}$$

$$\dot{[I]} = \tau[SI] - \gamma[I]. \tag{35}$$

Hangsúlyozzuk, hogy a (34)-(35) differenciálegyenlet-rendszer bármely gráf esetén fennáll, azonban mivel nem zárt, azaz tartalmaz egy újabb ismeretlen függvényt $[SI]$-t, azért önmagában nem alkalmas az $[I](t)$, illetve $[S](t)$ függvények meghatározására. Ennek kiküszöbölésére kétféle megközelítést szoktak alkalmazni. Az egyik megoldást az jelenti, hogy az $[SI]$ értéket valamilyen közelítés segítségével kifejezik az $[S]$ és $[I]$ értékével. Ezt nevezik az egyenlet lezárásának. Mivel az SI párok számára vonatkozik a lezárás, azért ezt pár lezárásnak (pair closure) nevezik. A másik megoldás az, ha az $[SI]$ függvényt deriválva, erre is levezetünk valamilyen differenciálegyenletet. Az első megközelítéssel kapcsolatos kérdéseket részletesen vizsgáljuk a 4.4. fejezetben. A második esetében pedig a párok várható értékére írunk fel differenciálegyenleteket. Ezekben az egyenletekben a különböző hármasok várható értéke fog megjelenni, amelyet intuitívan a következőképpen magyarázhatunk. Például egy (S, S) pár (S, I) típusú párrá válhat, ha ez egyik S csúcs egy harmadik (fertőző) csúcstól megkapja a fertőzést. Az ilyen fertőzések gyakorisága természetesen az (S, S, I) hármasok számától függ. A párok és hármasok közötti pontos kapcsolatról az alábbi tételt sikerült bebizonyítanunk.

14. Tétel. *Az $[S]$, $[I]$, $[SI]$, $[II]$ és $[SS]$ várható értékek teljesítik az alábbi differenciálegyenlet-rendszert.*

$$\dot{[S]} = \gamma[I] - \tau[SI], \tag{36}$$
$$\dot{[I]} = \tau[SI] - \gamma[I], \tag{37}$$
$$\dot{[SI]} = \gamma([II] - [SI]) + \tau([SSI] - [ISI] - [SI]), \tag{38}$$
$$\dot{[II]} = -2\gamma[II] + 2\tau([ISI] + [SI]), \tag{39}$$
$$\dot{[SS]} = 2\gamma[SI] - 2\tau[SSI]. \tag{40}$$

A fenti egyenletrendszert először Rand és Keeling vezették be [32, 43] heurisztikus valószínűségi érvelés alapján reguláris véletlen gráfra. A [66] dolgozatban megmutattuk, hogy a fenti rendszer tetszőleges gráf esetén fennáll, és a (26) alapegyenletekből levezethető.

4.4. Közelítő differenciálegyenletek

Az előző fejezetben láttuk, hogy SIS dinamika esetén tetszőleges gráfon történő betegségterjedés leírható a 2^N differenciálegyenletből álló alapegyenlet-rendszerrel. Megjegyezzük, hogy más két állapotú dinamika esetén (azaz olyannál, amelynél a csúcsok kétféle állapotban lehetnek) hasonlóan felírható az alapegyenlet. Az egyenletek nagy száma miatt természetesen egyszerűbb modellek bevezetése szükséges. Láttuk, hogy a gráf automorfizmusainak ismeretében a rendszer redukálható, különösen egyszerű struktúrájú gráfok esetében, az összevonás segítségével. Ekkor is azonban még $O(N^k)$ egyenletből álló differenciálegyenlet-rendszert kapunk. A 13. Tétel szerint a betegek számának várható értékére tetszőleges gráf esetén fennáll az

$$\dot{[I]} = \tau[SI] - \gamma[I]$$

differenciálegyenlet, amely azonban tartalmazza az SI típusú élek számának várható értékét is. Mivel ez szintén ismeretlen, azért a fenti egyenlet önmagában nem alkalmas az $[I]$ meghatározására. Amint fent említettük, az egyenlet lezárásának nevezik az olyan közelítő képleteket, amelyek az SI típusú élek számának várható értékét valamilyen módon összefüggésbe hozzák I értékével. Homogén fokszámeloszlású véletlen gráf esetén például, amikor a minden csúcs fokszáma n, az SI élek számára az $\frac{n}{N-1}(N - I(t))I(t)$ közelítést szokás alkalmazni [32, 43], melyre egyszerű kombinatorikus érvelésen alapuló heurisztikus magyarázatot adhatunk. Ezzel a közelítéssel az $\tilde{I}$ közelítő függvényre az

$$\dot{\tilde{I}} = \tau \frac{n}{N-1} \tilde{I}(N - \tilde{I}) - \gamma \tilde{I} \tag{41}$$

differenciálegyenletet kapjuk. A közelítés jóságát az irodalomban általában a Monte-Carlo szimulációval való összehasonlítással szokták vizsgálni. Teljes gráf esetén a fenti közelítés jó egyezést mutat a Monte-Carlo szimulációval, körgráf esetén az egyezés sokkal rosszabb, azonban véletlen gráfok esetén ismét jobb eredményt kapunk. (Ezen összehasonlításokat az értekezésben ábrákkal illusztráltuk.)

Természetes kérdés, hogy a közelítés pontosságára az alapegyenletből, a szimuláció felhasználása nélkül tudunk-e becslést adni. Azaz például igazolható-e, hogy valamilyen határátmenet során a (41) egyenlet pontossá válik? A jelen fejezetben erre a kérdésre adunk választ.

Amint fent említettük, a (41) közelítés csak homogén fokszámeloszlású gráf esetén lesz alkalmazható. Három példán vizsgáltuk a szimulációval való összehasonlítást, a teljes gráfon, a körgráfon és homogén véletlen gráfon. A körgráf esetén nem kaptunk jó egyezést, a véletlen gráf esetén pedig egyelőre nem ismert az alapegyenlet az irodalomban, így csak a teljes gráf esetén van remény a közelítés pontosságának egzakt becslésére. A teljes gráf esetén az alapegyenletek az alábbi $N + 1$ egyenletre redukálhatók az összevonás segítségével:

$$\dot{p}_k = a_{k-1}p_{k-1} - (a_k + c_k)p_k + c_{k+1}p_{k+1}, \quad k = 0, \dots, N, \tag{42}$$

ahol $p_k(t)$ annak valószínűsége, hogy a t időpontban k fertőzött csúcs van, és

$$a_k = \tau k(N - k), \quad c_k = \gamma k. \tag{43}$$

Ha kezdetben m darab fertőző csúcs van a teljes gráfban, akkor a fenti differenciálegyenlet-rendszert a

$$p_m(0) = 1, \quad p_k(0) = 0, \quad k \neq m \tag{44}$$

kezdeti feltétellel kell megoldani. A fertőző csúcsok száma várható értékének közelítésére felírt (41) egyenletben teljes gráf esetén $n = N - 1$, így az $x(t) = \tilde{I}(t)/N$ skálázott új változóra, amely a fertőzött csúcsok arányát adja meg, a differenciálegyenlet

$$\dot{x} = \beta x(1 - x) - \gamma x, \tag{45}$$

ahol $\beta = \tau N$. Itt feltételezzük, hogy β független N értékétől, és $\tau = \beta/N$ az N értékével változik, ugyanis csak ebben az esetben várható, hogy $N \to \infty$ esetén nemtriviális határátmenetet kapunk. A fertőzött csúcsok arányának várható értéke a (42) egyenlet megoldása után az

$$\frac{[I](t)}{N} = \sum_{k=0}^{N} \frac{k}{N} p_k(t) \tag{46}$$

képletből kapható meg. A közelítés pontosságáról az alábbi tételt igazoltuk.

15. Tétel. *Legyen x a (45) egyenlet megoldása az $x(0) = m/N$ kezdeti feltétel mellett, valamint legyen $[I](t)$ a fenti képlet szerinti várható érték, melyben p_k a (42) megoldása a (44) kezdeti feltétellel. Ekkor minden $t_0 > 0$ számhoz van olyan $K > 0$, melyre fennáll*

$$\left| x(t) - \frac{[I](t)}{N} \right| \leq \frac{K}{N}, \quad t \in [0, t_0].$$

Ebben a szakaszban áttekintjük azokat a módszereket, amellyel a fenti tétel, illetve az ilyen típusú általánosabb állítások igazolhatók.

Induljunk ki a (42) lineáris rendszerből, melyet úgy tekinthetünk, mint a $\{0, 1, \ldots, N\}$ állapotterű Markov-folyamat alapegyenletét, melyben $p_k(t)$ jelöli a k-adik állapot valószínűségét a t időpontban. A folyamatról mindössze annyit teszünk fel, hogy a k-adik állapotból csak a $k+1$-edik, vagy $k-1$-edik állapotba mehet át. Ilyen folyamatra példa a fent említett SIS típusú fertőzés terjedése teljes gráfon, de homogén véletlen gráfon is alkalmazható közelítésként ez az alapegyenlet. Természetesen számos más folyamat is ilyen típusú alapegyenletre vezet, az [59] dolgozatban egy adaptív hálózatban az aktivált élek számának leírása használtunk ilyen típusú egyenletet. Az egyenletrendszert megoldva az

$$y_1(t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{k}{N} p_k(t)$$

várható értéket szeretnénk meghatározni. Célunk egy olyan (45) típusú közelítő differenciálegyenlet levezetése, amelyből a fenti várható értékre közelítést kaphatunk a (42) alapegyenlet megoldása nélkül, valamint a közelítés pontosságára is becslést tudunk igazolni.

Az y_1 várható értékre az alábbi egyszerű lemmát felhasználva kaphatunk differenciálegyenletet.

4. Lemma. *Legyen r_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ egy adott sorozat, és tekintsük az*

$$r(t) = \sum_{k=0}^{N} r_k p_k(t)$$

függvényt, melyben a p_k függvényeket a (42) egyenletrendszer határozza meg. Tegyük fel továbbá, hogy $a_N = 0$ és $c_0 = 0$. Ekkor fennáll

$$\dot{r} = \sum_{k=0}^{N} \left(a_k(r_{k+1} - r_k) + c_k(r_{k-1} - r_k)\right) p_k.$$

Az y_1 várható érték deriváltjának meghatározásához alkalmazzuk a lemmát az $r_k = k/N$ sorozatra. Ekkor

$$\dot{y}_1 = \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k - c_k}{N} p_k. \tag{47}$$

Ebből az y_1 függvényre akkor kaphatunk differenciálegyenletet, ha a jobboldalt is sikerül az y_1 segítségével kifejezni. A legegyszerűbb esetben, amikor a_k és c_k lineárisan függ k-tól, ez közvetlenül megkapható. Legyen ugyanis valamely $A, C \in \mathbb{R}$ esetén $a_k = Ak$ $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$ és $c_k = Ck$, ekkor a fenti képletből

$$\dot{y}_1 = (A - C)y_1,$$

azaz a várható érték ezen egyszerű lineáris differenciálegyenlet megoldásából közvetlenül megkapható a (42) alapegyenlet megoldása nélkül. A fent tárgyalt (43) esetben az együtthatók nemlinearitása miatt ilyen módon nem kapunk differenciálegyenletet y_1-re. A $\tau = \beta/N$ feltételezéssel az y_1 deriváltjára az

$$\dot{y}_1 = \sum_{k=0}^{N} \left[\beta \frac{k}{N}(1 - \frac{k}{N}) - \gamma \frac{k}{N}\right] p_k = \sum_{k=0}^{N} F(\frac{k}{N}) p_k$$

összefüggést kapjuk, ahol $F(x) = \beta x(1-x) - \gamma x$. Ebből formálisan úgy kaphatunk differenciálegyenletet az y_1 függvényre, ha feltételezzük, hogy az F függvény alkalmazása és a várható érték képzése egymással felcserélhető. Ekkor ugyanis a jobbaldal $F(y_1)$ lenne, amely éppen a (45) egyenletet adja.

A (43) általánosításaként tekintsük a sokak által vizsgált, lásd például [20, 34], úgynevezett sűrűségfüggő (density dependent) esetet. Ekkor a (42) egyenletekben szereplő a_k és c_k egy A és C függvény segítségével a következő módon adható meg:

$$\frac{a_k}{N} = A\left(\frac{k}{N}\right), \quad \frac{c_k}{N} = C\left(\frac{k}{N}\right). \tag{48}$$

Ekkor a (47) egyenletből

$$\dot{y}_1 = \sum_{k=0}^{N} \left[A\left(\frac{k}{N}\right) - C\left(\frac{k}{N}\right)\right] p_k.$$

Ha formálisan ismét feltételezzük, hogy az $F = A - C$ függvény alkalmazása és a várható érték képzése egymással felcserélhető akkor a jobbaldal $F(y_1)$ lesz. Így a sűrűségfüggő esetben az

$$\dot{x} = A(x) - C(x) \tag{49}$$

közelítő differenciálegyenletet kapjuk. A közelítés pontosságát tehát az $|x - y_1|$ eltérés adja. A sűrűségfüggő esetben igazolható, hogy ez az eltérés nullához tart $N \to \infty$ esetén, sőt, amint a 15. Tételben, az ott tárgyalt speciális esetre megfogalmaztuk, az eltérés $1/N$ nagyságrendű. Az eltérés nullához tartását először Kurtz [34] igazolta a hetvenes évek elején valószínűségszámítási és operátor félcsoportokat használó módszerekkel. Ezt később absztrakt keretbe foglalták martingál elmélet felhasználásával [20]. Diekmann és Heesterbeek [15] monográfiájában az alapegyenletetből $N \to \infty$ esetén egy elsőrendű parciális differenciálegyenletet vezetnek le, amelyből heurisztikusan levezetik a (49) közelítő differenciálegyenletet. Ezen levezetés szigorú bizonyítását a [65] dolgozatban közöltük. Ez a bizonyítás a Kurtz féle valószínűségszámítási bizonyításhoz hasonlóan mély tételek alkalmazására épül. A 4.4.1. szakaszban "elemi" bizonyítást adunk a tételre. Ez a bizonyítás csak a közönséges differenciálegyenletek elméletének alapvető eszközeit igényli, és nemcsak pontonkénti, hanem egyenletes konvergenciát ad, hibabecsléssel együtt. A bizonyítás alapvetően új gondolata az összes momentumokra (nemcsak a várható értékre, mint első momentumra) felírt végtelen sok egyenletből álló közönséges differenciálegyenlet-rendszer bevezetése és alkalmazása becslések levezetésére. Az itt ismertetendő bizonyítás a [64] dolgozatban jelent meg. A momentumokra kapott végtelen rendszer vizsgálatának módszerét a (43) együtthatóknál általánosabb (42) alakú alapegyenlet esetére is kiterjesztettük Kato [31] és Banasiak [5] eredményeire alapozva. Az ezzel kapcsolatos eredményeket, melyeket az [52] dolgozatban publikáltunk, szintén a 4.4.1. szakaszban ismertetjük. A közelítés pontosságára vonatkozó eredményeinket az [52] dolgozatban egységes keretbe foglaltuk, és új bizonyítást is adtunk a Tételre, amely most csak az operátorfélcsoportok elméletének alapvető állításait használja, és (42) alakú alapegyenletek széles skálájára alkalmazható. Az egyik legfontosabb eredmény, hogy a sűrűségfüggési megszorító feltétel enyhíthető, ugyanis az állítást igazoltuk az úgynevezett aszimptotikusan sűrűségfüggő esetre is. Ezen eredményeket a 4.4.2. szakaszban ismertetjük.

4.4.1. Végtelen rendszer a momentumokra

Tekintsük ismét a (42) lineáris rendszert, amely a $\{0, 1, \ldots, N\}$ állapotterű Markov-folyamat alapegyenlete, melyben $p_k(t)$ jelöli a k-adik állapot valószínűségét a t időpontban. Ebben a szakaszban feltételezzük, hogy a folyamat sűrűségfüggő, azaz

$$\frac{a_k}{N} = A\left(\frac{k}{N}\right), \quad \frac{c_k}{N} = C\left(\frac{k}{N}\right), \tag{50}$$

továbbá az A és C függvény polinom, azaz

$$A(x) = \sum_{j=0}^{l} g_j x^j, \qquad C(x) = \sum_{j=0}^{l} h_j x^j. \tag{51}$$

Tekintsük azt a valószínűségi változót, amely a k-adik állapothoz a $\frac{k}{N}$ számot rendeli hozzá. Ennek n-edik momentuma

$$y_n(t) = \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n p_k(t), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{52}$$

($y_1(t)$ a várható értéke, amely számunkra igazán érdekes). A 4.4. szakaszban az $y_1(t)$ várható érték deriváltjára a 4. Lemma segítségével vezettük le a (47) képletet. Alkalmazzuk most ismét ezt a lemmát az $r_k = (k/N)^n$ választással az y_n deriváltjának levezetésére. Ehhez szükségünk lesz az alábbi képletekre. Legyen

$$R_{k,n} = \frac{(k+1)^n - k^n - nk^{n-1}}{N^{n-1}}, \quad Q_{k,n} = \frac{(k-1)^n - k^n + nk^{n-1}}{N^{n-1}},$$

valamint

$$d_n(t) = \sum_{k=0}^{N} (a_k R_{k,n} + c_k Q_{k,n}) p_k(t). \tag{53}$$

Ekkor a 4. Lemma alapján

$$\dot{y}_n(t) = \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{a_k}{N} \left(n \frac{k^{n-1}}{N^{n-1}} + R_{k,n} \right) + \frac{c_k}{N} \left(-n \frac{k^{n-1}}{N^{n-1}} + Q_{k,n} \right) \right) p_k(t),$$

ezért

$$\dot{y}_n(t) = n \cdot \sum_{k=0}^{N} \frac{a_k - c_k}{N} \cdot \left(\frac{k}{N}\right)^{n-1} \cdot p_k(t) + \frac{1}{N} d_n(t). \tag{54}$$

Mivel az $\frac{a_k}{N}$ és $\frac{c_k}{N}$ az (51) feltevés szerint $\frac{k}{N}$ polinomjaként írható fel, azért a jobboldal első tagja az $y_m(t)$ függvények lineáris kombinációjaként írható fel. (Az m index maximális értéke az A és C polinomok fokától függ.) A binomiális tétel felhasználásával $R_{k,n}$ és $Q_{k,n}$ felírható k hatványainak segítségével, így d_n is kifejezhető $d_n(t) = \sum_{m=1}^{n} d_{nm} y_m(t)$ alakban a d_{nm} együtthatók megfelelő választásával. Ezzel (54) úgy tekinthető, mint az y_n ismeretlen függvényekre felírt végtelen sok egyenletből álló lineáris differenciálegyenlet-rendszer. A rendszert azonban nem a szokásos mátrix alakban adtuk meg, mert célszerű az $O(\frac{1}{N})$ nagyságrendű tagokat különválasztani, az $N \to \infty$ határátmenet kezelése érdekében. Mivel a d_n tartalmazza N-et, azért a határátmenet vizsgálatához meg kell mutatnunk, hogy d_n korlátos marad $N \to \infty$ esetén (hiszen csak így tud a d_n előtti $1/N$ tényező érvényesülni). Ezt fogalmazza meg az alábbi lemma.

5. Lemma. *Van olyan c szám, amellyel a d_n függvények teljesítik az alábbi egyenlőtlenséget minden $t \geq 0$ esetén.*

$$0 \leq d_n(t) \leq c \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2}. \tag{55}$$

Vezessük be a

$$q_j := g_j - h_j, \quad j = 0, 1, \ldots, l, \tag{56}$$

jelöléseket. Ekkor (50) és (51) felhasználásával az (54) rendszer a következő alakba írható

$$\dot{y}_n(t) = n \cdot \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=0}^{l} q_j \left(\frac{k}{N}\right)^{n+j-1} \cdot p_k(t) + \frac{1}{N} d_n(t)$$

azaz

$$\dot{y}_n(t) = n \cdot \sum_{j=0}^{l} q_j y_{n+j-1}(t) + \frac{1}{N} d_n(t). \tag{57}$$

Tekintsük most az $N \to \infty$ határátmenetet, ekkor az 5. Lemma miatt formálisan a

$$\dot{z}_n(t) = n \cdot \sum_{j=0}^{l} q_j z_{n+j-1}(t) \tag{58}$$

$(n = 1, 2, \ldots)$ végtelen rendszerhez jutunk. Ezt a rendszert az 57 végtelen rendszer közelítésének tekinthetjük nagy N esetén. A közelítő rendszer legfontosabb előnye, hogy a számunkra érdekes kezdeti feltételhez tartozó megoldása explicit módon megadható egy egyszerű nemlineáris differenciálegyenlet (nem rendszer) segítségével. Ugyanis a (44) kezdeti feltétel az y_n momentumokra (52) alapján az $y_n(0) = m^n/N^n$ kezdeti feltételt adja, tehát a z_n függvényekre vonatkozó (58) végtelen rendszert is tekintsük a

$$z_n(0) = \frac{m^n}{N^n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

kezdeti feltétellel. Az (58) végtelen rendszerrel kapcsolatban az új és alapvető észrevétel az, hogy célszerű a megoldását $z_n = z^n$ alakban keresni, ahol z egy egyelőre ismeretlen függvény. Ha $z(0) = m/N$, akkor ezek a függvények teljesítik a kezdeti feltételt. Nézzük, hogy mit kapunk, ha az (58) végtelen rendszerbe helyettesítjük őket. Könnyen látható, hogy az n-edik egyenlet egyszerűsíthető lesz nz^{n-1}-nel, és a

$$\dot{z} = \sum_{j=0}^{l} q_j z^j = A(z) - C(z) \tag{59}$$

polinom jobboldalú közönséges differenciálegyenlethez jutunk, felhasználva az A és C függvények (51) képletben megadott alakját. Ha tehát z megoldása ennek az egyszerű egyenletnek, akkor a $z_n = z^n$ függvények megoldását adják az (58) végtelen rendszernek. Az (59) egyenlet pedig nem más, mint a (42) alapegyenlethez tartozó várható értékre vonatkozó (49) mean-field egyenlet. Ezzel tehát a momentumokra vonatkozó végtelen rendszerből is levezettük a (49) mean-field egyenletet, de ami ennél jelentősebb, teljesen új módszert kaphatunk annak igazolására, hogy $N \to \infty$ esetén az y_1 várható érték a (49) mean-field egyenlet z megoldásához tart. Sőt, azt is igazolni tudjuk majd, hogy nemcsak a várható értékre, mint első momentumra, hanem bármely y_n momentumra jó közelítést ad a (49) egyenletből kapott z^n függvény.

A továbbiakban kétféle bizonyítást mutatunk arra, hogy az $|y_n - z_n|$ eltérés $1/N$ nagyságrendű $N \to \infty$ esetén. Az első bizonyítás, amelyet részletesen az értekezés 6.4.1. szakaszában ismertettünk, egy lineáris rendszerekre vonatkozó absztrakt perturbációs tételen alapszik. Azonban, mint látni fogjuk, ez csak akkor érvényes, ha a q_j együtthatók bizonyos előjelfeltételeket teljesítenek. A számunkra fontos (43) esetben ez az előjelfeltétel nem teljesül, ezért erre az esetre kidolgoztunk egy új bizonyítást, amelyet az értekezés 6.4.2. szakaszában mutattunk be. Ez eleminek nevezhető (mivel mélyebb funkcionálanalízisbeli tételeket nem használ fel), de meglehetősen sok lépésből áll, melyeket itt nem fogunk részletesen ismertetni.

Az első bizonyításhoz vezessük be formálisan a sorozatok ℓ^1 terén az alábbi operátort.

$$(\mathcal{L}f)_n := n \cdot \sum_{j=0}^{l} q_j f_{n+j-1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

valamint vezessük be a sorozatok terébe képező valós változós

$$y(t) := (y_n(t))_{n\in\mathbb{N}}, \quad z(t) := (z_n(t))_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{és} \quad d(t) := (d_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$$

függvényeket. Ekkor az (57) rendszer az

$$\dot{y}(t) = \mathcal{L}y(t) + \frac{1}{N}d(t), \tag{60}$$

az (58) rendszer pedig a

$$\dot{z}(t) = \mathcal{L}z(t) \tag{61}$$

absztrakt formába írható, amivel az előbbi rendszer az utóbbi $1/N$ nagyságrendű perturbációjaként fogható fel. Így a kívánt, az $y(t) - z(t)$ különbség nagyságára vonatkozó becslés a konstans variációs formula következményeként adódik, amennyiben az operátort egy megfelelő téren értelmezni tudjuk. Ehhez Kato [31], valamint Banasiak és munkatársainak [5] alábbi eredményét fogjuk használni.

6. Lemma. *Legyen*

$$\mathcal{D}(L_{\max}) := \left\{ f \in \ell^1 : \mathcal{L}f \in \ell^1 \right\}, \quad L_{\max} := \mathcal{L}|\mathcal{D}(L_{\max}).$$

Tegyük fel, hogy a $q_0, q_2, \ldots, q_l \geq 0$*,* $q_1 \leq 0$*, valamint*

$$\begin{aligned} q_0 + q_1 + \cdots + q_l &\leq 0, \\ q_0 - q_2 - 2q_3 - 3q_4 - 4q_5 - \cdots - (l-1)q_l &\leq 0 \end{aligned}$$

előjelfeltételek fennállnak. Ekkor létezik olyan (L, D) *operátor, amelyre* $L \subset L_{\max}$ *és* (L, D) *egy erősen folytonos, kontrakciókból álló* $(T(t))_{t\geq 0}$ *operátorfélcsoport generátora az* ℓ^1 *téren.*

A lemma kis módosítása [31] 1. Tételének. A tételhez az $\mathcal{L}$ operátornak megfelelő végtelen mátrix oszlopösszegeit kell kiszámítani. A fenti feltevések mellett ezek nem pozitívak, azaz

$$(n+1)q_0 + nq_1 + (n-1)q_2 + (n-2)q_3 + \cdots + (n-l+1)q_l \leq 0, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Kato fenti tételében egyenlőtlenség helyett egyenlőség van, azonban a bizonyítás változtatás nélkül ebben az esetben is érvényes.

A lemma felhasználásával az alábbi tételt tudjuk igazolni.

16. Tétel. *Tegyük fel, hogy fennállnak a 6. Lemma előjelfeltételei. Ekkor létezik olyan* $\|\cdot\|_w$ *norma, amellyel definiált súlyozott* ℓ^1_w *tér pozitívan invariáns az (57) és (58) egyenletekre, azaz* $z_0 = y_0 \in \ell^1_w$ *kezdeti feltétel esetén az* $y(t)$ *és* $z(t)$ *megoldások is ebben a térben vannak, és teljesül az alábbi becslés. Minden* $T > 0$ *esetén van olyan* $K > 0$*, melyre*

$$\|y(t) - z(t)\|_w \leq \frac{K}{N} \quad \text{ha } t \in [0, T],$$

azaz az (57) egyenlet megoldása az (58) megoldásához tart korlátos időintervallumon $N \to \infty$ *esetén.*

Az alábbi következményben összefoglaljuk, hogy a fenti általános tétel mit ad a mean-field egyenlettel való közelítés pontosságáról.

3. Következmény. *Tekintsük a (42) alapegyenletet, melyben az együtthatókat az (50) és (51) képletek adják. Tegyük fel, hogy az (56) együtthatókra teljesülnek a 6. Lemma előjelfeltételei. Legyenek a* p_k *függvények a (42) rendszer (44) kezdeti feltételhez tartozó megoldásai. Legyen* y_1 *az (52) képlettel megadott várható érték, és legyen* z *a (49) mean-field egyenlet* $z(0) = y_1(0)$ *kezdeti feltételhez tartozó megoldása. Ekkor minden* $T > 0$ *esetén van olyan* $K > 0$*, melyre*

$$|y_1(t) - z(t)| \leq \frac{K}{N} \quad \text{ha } t \in [0, T].$$

A következmény alkalmazhatóságát az előjelfeltétel jelentősen korlátozza. Bár bizonyos rendszerekben, például az [59] dolgozatunkban szereplő adaptív hálózat esetén teljesül a feltétel, az egyik leggyakrabban vizsgált esetben, teljes gráfon történő SIS típusú járványterjedés esetén, amikor a (42) alapegyenlet együtthatóit (43) adja meg ($\tau = \beta/N$ feltételezésével), a feltétel nem teljesül. Ugyanis ekkor

$$A(x) = \beta x(1-x), \quad C(x) = \gamma x,$$

így az (50) együtthatók

$$q_0 = 0, \quad q_1 = \beta - \gamma, \quad q_2 = -\beta,$$

azaz a $q_2 \geq 0$ feltétel sérül. Ez vezetett minket egy új, az előjelfeltételeket nem használó, azonban speciálisan a (43) képletben megadott együtthatók esetére alkalmazható bizonyítás kidolgozásához. Ezen bizonyítás fontosabb lépéseit ismertetjük a továbbiakban.

Térjünk tehát vissza a teljes gráf és az SIS dinamika esetéhez, amelynél a (42) alapegyenlet együtthatóit (43) adja meg, és $\tau = \beta/N$. Ekkor az (57) végtelen rendszer az

$$\dot{y}_j(t) = j(\beta-\gamma)y_j(t) - j\beta y_{j+1}(t) + \frac{1}{N}d_j(t), \tag{62}$$

alakba írható, ahol a d_j függvényeket (53) adja meg, az (58) végtelen rendszer pedig az alábbi alakot ölti

$$\dot{z}_j(t) = j(\beta-\gamma)z_j(t) - j\beta z_{j+1}(t). \tag{63}$$

A kezdeti feltétel mindkét rendszerhez ugyanaz, $y_j(0) = z_j(0) = m^j/N^j$. Amint fent említettük, a (63) rendszer ezen kezdeti feltételhez tartozó megoldása $z_j = z^j$ alakban kereshető, ahol z megoldása a

$$\dot{z} = (\beta-\gamma)z - \beta z^2 \tag{64}$$

differenciálegyenletnek a $z(0) = m/N$ kezdeti feltétellel. Az értekezésben a következő tételt igazoltuk.

17. Tétel. *Ha a (62) és (63) megoldásai ugyanabból az $y_j(0) = m^j/N^j = z_j(0)$ kezdeti feltételből indulnak ki, akkor bármely $T > 0$ számhoz van olyan $K > 0$, amellyel fennáll az alábbi becslés*

$$0 \leq z_1(t) - y_1(t) \leq \frac{K}{N} \qquad \text{ha } t \in [0,T].$$

A tétel bizonyításához számos lemmán és segédállításon keresztül jutottunk el, melyek közül itt csak kettőt fogalmazunk meg.

7. Lemma. *Bármely $T > 0$ számhoz létezik olyan $j_1 \in \mathbb{N}$, amelyre*

$$z_j(t) \leq y_j(t), \qquad \text{ha } j \geq j_1, \quad t \in [0,T].$$

A tétel bizonyításához szükséges második lemma megfogalmazásához minden $j \in \mathbb{N}$ és $j \geq 1$ esetén vezessük be az új u_j függvényt a következő képlettel

$$u_j = y_j - z_j.$$

A (62) és (63) differenciálegyenleteket egymásból kivonva, az új függvényre az

$$\dot{u}_j(t) = j(\beta - \gamma)u_j(t) - j\beta u_{j+1}(t) + \frac{1}{N}d_j(t) \tag{65}$$

differenciálegyenletet kapjuk, az $u_j(0) = 0$ kezdeti feltétellel.

8. Lemma. *Bármely $T > 0$ számhoz van olyan $r \in \mathbb{N}$ és $K_r > 0$, melyekkel*

$$|u_r(t)| \leq \frac{K_r}{N} \qquad \text{ha } t \in [0, T].$$

Ezen lemmát felhasználva elemi eszközökkel igazolható a tétel.

4.4.2. Operátor félcsoportok módszere

Tekintsük ismét a (42) lineáris rendszert, amely a $\{0, 1, \ldots, N\}$ állapotterű Markov-folyamat alapegyenlete. A (42) rendszerben $p_k(t)$ jelöli a k-adik állapot valószínűségét a t időpontban. Az eddigiekben feltételeztük, hogy a folyamat sűrűségfüggő, azaz az a_k és c_k együtthatókat az (50) képlet adja meg. Most valamivel általánosabb feltételt adunk meg az együtthatókra, nevezetesen azt feltételeztük, hogy a folyamat aszimptotikusan sűrűségfüggő, azaz az együtthatók az A_N és C_N függvényekkel az alábbi módon adhatók meg

$$a_k = A_N(k), \quad c_k = C_N(k), \tag{66}$$

és az alábbi határértékek bármely $x \in [0, 1]$, esetén léteznek

$$A(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{A_N(Nx)}{N}, \quad C(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{C_N(Nx)}{N}, \tag{67}$$

ahol A és C (legalább) folytonos függvények a $[0, 1]$ intervallumon. Megjegyezzük, hogy a sűrűségfüggő eset ennek speciális esete, akkor $A(x) = \frac{A_N(Nx)}{N}$ és $C(x) = \frac{C_N(Nx)}{N}$ minden N-re.

Bevezetve a

$$G_N := \begin{pmatrix} -b_0 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_0 & -b_1 & c_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & -b_2 & c_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{N-2} & -b_{N-1} & c_N \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{N-1} & -b_N \end{pmatrix}$$

tridiagonális mátrixot, ahol

$$b_k = a_k + c_k, \quad k = 0, \ldots, N,$$

és a $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_N(t))^T$ oszlopvektort, a (42) lineáris rendszer, azaz az alapegyenlet a

$$\dot{p}(t) = G_N p(t) \tag{68}$$

alakba írható.

A $p_k(t)$ valószínűségek a

$$p_k(t) = P\left(X_N(t) = \frac{k}{N}\right)$$

képlettel adhatók meg, ahol az $X_N(t)$ Markov-folyamat értékei a

$$\left\{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, 1\right\}$$

halmazból valók. A $p_k(t)$ valószínűségek az átmenet valószínűségekkel a

$$p_k(t) = \sum_{j=0}^{N} p_{j,k}(t) p_j(0),$$

formában fejezhetők ki, ahol

$$p_{j,k}(t) = P\left(X_N(t) = \frac{k}{N} | \, X_N(0) = \frac{j}{N}\right)$$

az a feltételes valószínűség, amely megadja, hogy a j-edik állapotból indulva milyen valószínűséggel kerül a rendszer t idő múlva a k-adik állapotba. A (68) alapegyenletből nyilvánvaló, hogy az átmenet mátrixa

$$T_N(t) := [p_{j,k}(t)] = \mathrm{e}^{G_N^\top t}.$$

A sűrűségfüggő esethez hasonlóan most is, azaz az aszimptotikus sűrűségfüggés esetén, a (49) ún. mean-field egyenletet fogjuk közelítő egyenletként használni, melynek alakja

$$\dot{x} = A(x) - C(x). \tag{69}$$

Ezen szakasz fő eredménye a következő tétel, amely a mean-field egyenlet megoldása és a várható érték eltérésére ad egyenletes becslést.

18. Tétel. *Legyen p_k a (42) alapegyenlet $p_m(0) = 1$, $p_j(0) = 0$, $j \neq m$ kezdeti feltételnek eleget tevő megoldása. Legyen*

$$y_1(t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{k}{N} p_k(t)$$

a folyamat várható értéke, x pedig a (69) differenciálegyenlet megoldása az $x(0) = y_1(0) = \frac{m}{N}$ kezdeti feltétel mellett. Tegyük fel továbbá, hogy a (67) határértékek egyenletesek abban az értelemben, hogy létezik olyan L szám, melyre minden $x \in [0,1]$ és $N \in \mathbb{N}$ esetén fennáll

$$|A(x) - \frac{A_N(Nx)}{N}| \leq \frac{L}{N} \quad , \quad |C(x) - \frac{C_N(Nx)}{N}| \leq \frac{L}{N}. \tag{70}$$

Ekkor minden $t_0 > 0$ számhoz létezik olyan M, melyre

$$|x(t) - y_1(t)| \leq \frac{M}{N}, \; t \in [0, t_0].$$

A fent definiált $(T_N(t))_{t\geq 0}$ operátor félcsoport egyenletesen folytonos a $\mathbb{C}^{N+1}$ téren bármely $N \in \mathbb{N}$ esetén. Ebből következően

$$(T_N(t)f)\left(\frac{j}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right) \cdot p_{j,k}(t), \tag{71}$$

amennyiben $f = (f_0, \ldots, f_N) \in \mathbb{C}^{N+1}$, ahol a

$$\mathbb{C}^{N+1} \equiv \left\{ f \mid f : \{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \cdots, 1\} \to \mathbb{C} \right\}$$

azonosítással élünk.

A továbbiakban tegyük fel, hogy $A, C \in C^2[0,1]$. Jelölje a (69) egyenlet x_0 kezdeti feltételhez tartozó megoldását $\varphi(t, x_0)$, ekkor a

$$(T(t)f)(x_0) := f(\varphi(t, x_0)), \quad f \in C([0,1]),\ t \geq 0 \tag{72}$$

operátor félcsoport erősen folytonos a $C([0,1])$ téren (lásd például a [18] könyv 3.28. fejezetét), generátorát jelölje $(G, D(G))$. Ezenkívül tudjuk, hogy $f \in C^1([0,1])$ esetén

$$(Gf)(x_0) = (A(x_0) - C(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

A tétel bizonyítása azon alapszik, hogy a $(T_N(t))_{t\geq 0}$ félcsoport a $(T(t))_{t\geq 0}$ félcsoport approximációjának tekinthető. Azonban a két félcsoport különböző tereken hat, míg az első az $X_N := \mathbb{C}^{N+1}$ téren, addig a második az $X := C^1([0,1])$ függvénytéren. Ahhoz, hogy közös térben alkalmazhassunk approximációs tételt, vezessük be a következő operátorokat

$$J_N : X_N \to X, \quad J_N(f) := g, \tag{73}$$

$$P_N : X \to X_N, \quad P_N(g) := f,\ \text{melyre}\ f\left(\frac{k}{N}\right) = g\left(\frac{k}{N}\right),\ k = 0, \ldots, N \tag{74}$$

olyan módon, hogy $\|J_N\| \leq 1$, $\|P_N\| \leq 1$, $N \in \mathbb{N}$ és

$$P_N J_N = I_{X_N}, \quad N \in \mathbb{N};$$
$$J_N P_N f \to f, \quad N \to \infty\ \forall f \in X$$

teljesüljön (lásd [7] 3.5. Definíció). Az approximációs eredményt a következő lemmában fogalmazzuk meg, ennek segítségével a tétel az operátor félcsoportok elméletének alapvető eszközeivel igazolható.

9. Lemma. *Tegyük fel, hogy teljesülnek a 18. Tétel feltételei. A $(T_N(t))_{t\geq 0}$ és $(T(t))_{t\geq 0}$ operátor félcsoportokra a következő teljesül. Bármely $f \in C^2([0,1])$ függvényhez és $t_0 > 0$ számhoz van olyan $C = C(f, t_0) > 0$ konstans, melyre minden $t \in [0, t_0]$ esetén fennáll*

$$\|(P_N T(t) - T_N(t) P_N) f\| \leq \frac{C}{N}, \tag{75}$$

ahol P_N a (74) projekciót jelöli.

5. Az új eredmények összefoglalása tézisenként

1. Tézis. A time-map módszer szisztematikus alkalmazása reakció-diffúzió egyenletek radiálisan szimmetrikus, pozitív stacionárius megoldásai pontos számának meghatározására. Az értekezésben a 2.2. szakasz állításai.

2. Tézis. Másodrendű, szemilineáris, konvex nemlinearitást tartalmazó, egy-dimenziós peremérték problémák teljes osztályozása a pozitív megoldások száma szerint. Az értekezésben a 2.1., 2.2. és 2.3. Tétel, kvázilineáris egyenletre, pedig a 2.4. és 2.5. Tétel.

3. Tézis. Másodrendű, szemilineáris, szinguláris nemlinearitást tartalmazó, egy-dimenziós peremérték problémák részleges osztályozása a pozitív megoldások száma szerint. Az értekezésben a 2.6. Tétel.

4. Tézis. Az $u'' + u^p - u^{-\alpha} = 0$, $u(-1) = 0 = u(1)$ peremérték probléma pozitív megoldásainak számára vonatkozó teljes bifurkációs diagramm meghatározása, amely speciális esetként Choi, Lazer és McKenna sejtésének [11] bizonyítását is tartalmazza. Az értekezésben a 2.7. Tétel.

5. Tézis. Másodrendű, szemilineáris, konvex vagy konkáv nemlinearitást tartalmazó, általános tartományon adott peremérték problémák pozitív megoldásai stabilitásának meghatározása. Az értekezésben a 2.9. és 2.10. Tétel.

6. Tézis. Reakció-diffúzió egyenletek utazó hullám megoldásai stabilitásának vizsgálata, a linearizálással kapott operátor spektrumának jellemzése. Az értekezésben a 3.5., 3.6. Tétel és a 3.1. Következmény.

7. Tézis. Reakció-diffúzió egyenletek utazó hullám megoldásai stabilitásának vizsgálata az Evans-függvény segítségével. Az értekezésben a 3.7. Tétel és különböző lángterjedési modellek vizsgálata.

8. Tézis. Az alapegyenletek felírása tetszőleges gráfon zajló bináris dinamikájú folyamat esetén. A 2^N egyenletből álló rendszer összevonása a gráf automorfizmusainak felhasználásával. Az értekezésben az 5.1. Tétel, valamint az 5.2. és 5.3. Lemma.

9. Tézis. A különböző típusú csúcsok és élek számának várható értékére vonatkozó differenciálegyenletek levezetése tetszőleges gráfon zajló bináris dinamikájú folyamat esetén. Az értekezésben az 5.2. és 5.3. Tétel.

10. Tézis. Tridiagonális átmenet mátrixszal megadott Markov-folyamat esetén a várható értékre vonatkozó közelítő differenciálegyenlet közelítési pontosságának becslése a momentumokra vonatkozó végtelen sok differenciálegyenletből álló rendszer segítségével. Az értekezésben a 6.5. Tétel.

11. Tézis. Tridiagonális átmenet mátrixszal megadott Markov-folyamat esetén a várható értékre vonatkozó közelítő differenciálegyenlet közelítési pontosságának becslése operátor félcsoport elméleti módszerrel. Az értekezésben a 6.6. Tétel.

Hivatkozások

[1] Alexander, J., Gardner, R., Jones, C., A topological invariant arising in the stability analysis of travelling waves, *J. Reine Angew. Math.* **410** (1990), 167-212.

[2] Ambrosetti, A., Brezis, H., Cerami, G., Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems, *J. Func. Anal.* **122** (1994), 519-543.

[3] Ambrosetti, A., Prodi, G., *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge UP, 1993.

[4] Atkinson, F.V., Peletier, L.A., Elliptic equations with nearly critical growth, *J. Diff. Eqns.* **70** (1987), 349-365.

[5] Banasiak, J., Lachowicz, N., Moszyński, N., Semigroups for generalized brith-and-death equations in ℓ^p spaces, *Semigroup Forum* **73** (2006), 175-193.

[6] Barrat, A., Barthélemy, M., Vespignani, A., *Dynamical processes on complex networks*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[7] Bátkai, A., Csomós, P., Nickel, G., Operator splittings and spatial approximations for evolution equations, *J. Evol. Equ.* **9** (2009), 613-636.

[8] Berestycki, H., Nicolaenko, B., Scheurer, B., Traveling wave solutions to combustion models and their singular limits, *SIAM J. Math. Anal.* **16** (1985), 1207-1242.

[9] Brezis, H., Nirenberg, L., Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, *Comm. Pure Appl. Math.* **36** (1983), 437-477.

[10] Brown, K.J., Shivaji, R., Instability of nonnegative solutions for a class of semipositone problems, *Proc. AMS* **112** (1991), 121-124.

[11] Choi, Y.S., Lazer, A.C., McKenna, P.J., Some remarks on a singular elliptic boundary value problem, *Nonlin. Anal.* **32** (1998), 305-314.

[12] Coclite, M.M, Palmieri, G., On a singular nonlinear Dirichlet problem, *Comm. Partial Diff. Eqns.* **14** (1989), 1315-1327.

[13] Coppel, W.A., *Dichotomies in stability theory*, Lect. Notes Math. **629**, Springer, 1978.

[14] Díaz, J.I., Morel, J.M., Oswald, L., An elliptic equation with singular nonlinearity, *Comm. Partial Diff. Eqns.* **12** (1987), 1333-1344.

[15] Diekmann, O., Heesterbeek, J.A.P., *Mathematical epidemiology of infectious diseases: model building, analysis and interpretation*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, UK, 2000.

[16] Drábek, P., Milota, J., *Methods of nonlinear analysis. Applications to differential equations*, Birkhäuser, Basel, 2007.

[17] Draief, M., Massoulié, L., *Epidemics and rumours in complex networks*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 369. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[18] Engel, K.-J., Nagel, R., *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Graduate Texts in Math., vol. 194, Springer-Verlag, 2000.

[19] Erbe, L., Tang, M., Uniqueness theorems for positive radial solutions of quasilinear elliptic equations in a ball, *J. Diff. Eqns.* **138** (1997), 351-379.

[20] Ethier, S. N., Kurtz, T. G., *Markov Processes: Characterization and Convergence.* John Wiley & Sons Ltd, USA, 2005.

[21] Evans, J.W., Nerve axon equations IV: The stable and unstable impulse, *Indiana Univ. Math. J.* **24** (1974/75), 1169-1190.

[22] Fiedler, B., Scheel, A., Spatio-temporal dynamics of reaction-diffusion patterns, in *Trends in nonlinear analysis*, 23-152, Springer, Berlin, 2003.

[23] Fife, P.C., *Lecture notes in biomathematics*, Springer, 1979.

[24] Gidas, B., Ni, W.N., Nirenberg, L., Symmetry and related properties via the maximum principle, *Comm. Math. Phys.* **68** (1979), 209-243.

[25] Giovangigli, V., *Multicomponent flow modeling*, Birkhauser, 1999.

[26] Grindrod, P., *Patterns and Waves: The Theory and Applications of Reaction-Diffusion Equations*, Oxford UP, 1991.

[27] Henry, D., *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Springer, 1981.

[28] Hernández, J., Mancebo, F.J., Singular elliptic and parabolic equations, *Handbook of differential equations*, M. Chipot, P. Quittner eds., Vol.3., 317-400, Elsevier, (2006).

[29] House, T., Keeling, M.J., Insights from unifying modern approximations to infections on networks, *J. Roy. Soc. Interface* **8** (2011), 67-73.

[30] Joseph, D.D., Lundgren, T.S., Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources, *Arch. Rational Mech. Anal.* **49** (1973), 241-269.

[31] Kato, T., On the semi-groups generated by Kolmogoroff's differential equations, *J. Math. Soc. Japan* **6** (1954), 1-15.

[32] Keeling, M.J., The effects of local spatial structure on epidemiological invasions, *Proc. R. Soc. Lond. B* **266** (1999), 859-867.

[33] Keeling, M.J., Eames, K.T.D., Networks and epidemic models, *J. Roy. Soc. Interface* **2** (2005), 295-307.

[34] Kurtz, T.G., Solutions of ordinary differential equations as limits of pure jump Markov processes, *J. Appl. Prob.* **7** (1970), 49-58.

[35] Leung, A.W., *Nonlinear systems of partial differential equations. Applications to life and physical sciences*, World Scientific Publishing, Hackensack, NJ, 2009.

[36] Lions, P.L., On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations, *SIAM Rev.* **24** (1982), 441-467.

[37] Maya, C., Shivaji, R., Instability of nonnegative solutions for a class of semilinear elliptic boundary value problems, *J. Comp. Appl. Math.* **88** (1998), 125-128.

[38] Newman, M. E. J., Barabási, A.-L., Watts, D.J., *The structure and dynamics of networks*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.

[39] Ouyang, T., Shi, J., Exact multiplicity of positive solutions for a class of semilinear problem:II. *J. Diff. Eqns.* **158** (1999), 94-151.

[40] Palmer, K.J., Exponential dichotomies and Fredholm operators, *Proc. AMS* **104** (1988), 149-156.

[41] Pao, C.V., *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, Plenum Press, New York, 1992.

[42] Pohozaev, S.I., Eigenfunctions of the equation $\Delta u + f(u) = 0$, *Soviet Math.* **5** (1965), 1408-1411.

[43] Rand, D.A., Correlation equations for spatial ecologies, In: McGlade, J (ed.) *Advanced Ecological Theory*, pp. 100-142. Blackwell, Oxford, 1999.

[44] Robinson, J.C., *Infinite-dimensional dynamical systems. An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors*, Cambridge UP, 2001.

[45] Sandstede, B., Scheel, A., On the structure of spectra of modulated travelling waves, *Math. Nachr.* **232** (2001), 39-93.

[46] Shi, J., *Solution set of semilinear elliptic equations. Global bifurcation and exact multiplicity*, World Scientific Publishing, Hackensack, NJ, 2010.

[47] Smoller, J.A., *Shock waves and reaction diffusion equations*, Springer, 1983.

[48] Stuart, C.A., Existence and approximation of solutions of nonlinear elliptic equations, *Math. Z.* **147** (1976), 53-63.

[49] Tertikas, A., Stability and instability of positive solutions of semipositone problems *Proc. AMS* **114** (1992), 1035-1040.

[50] Volpert, A.I., Volpert, V.A., Volpert, V.A., *Traveling wave solutions of parabolic systems*, AMS, 1994.

[51] Zhang, L., On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity, *J. Math. Anal. Appl.* **194** (1995), 103-113.

Saját publikációk

[52] Bátkai, A., Kiss, I.Z., Sikolya.E., Simon, P.L., Differential equation approximations of stochastic network processes: an operator semigroup approach, *Netw. Heter. Media* **7** (2012), 43-58.

[53] Farkas, G., Simon, P.L., Stability properties of positive solutions to partial differential equations with delay, *Electr. J. Diff. Eqns.* **2001** (64) (2001), 1-8.

[54] Hernández, J., Karátson, J., Simon, P.L., Multiplicity for semilinear elliptic equations involving singular nonlinearity, *Nonlin. Anal.* **65** (2006), 265-283.

[55] Horváth, T., Simon, P.L., On the exact number of solutions of a singular boundary value problem, *J. Diff. Int. Eqns.* **22** (2009), 787-796.

[56] Karátson, J., Simon, P.L., Bifurcations of semilinear elliptic equations with convex nonlinearity, *Electr. J. Diff. Eqns.* **1999** (43) (1999), 1-16.

[57] Karátson, J., Simon, P.L., On the stability properties of nonnegative solutions of semilinear problems with convex or concave nonlinearity, *J. Comp. Appl. Math.* **131** (2001), 497-501.

[58] Karátson, J., Simon, P.L., On the linearized stability of positive solutions of quasilinear problems with p-convex or p-concave nonlinearity, *Nonlin. Anal.* **47** (2001), 4513-4520.

[59] Kiss., I.Z., Berthouze, L., Taylor, T.J., Simon, P.L., Modelling approaches for simple dynamic networks and applications to disease transmission models, *Proc. Roy. Soc. A* **468** (2141), (2012), 1332-1355.

[60] Simon, P.L., On the structure of spectra of travelling waves, *Electr.J. Qual. Theor. Diff. Eqns.* **15** (2003), 1-19.

[61] Simon, P.L., Exact multiplicity of positive solutions for a class of singular semilinear equations, *Diff. Eq. Dyn. Sys.* **17** (2009), 147-161.

[62] Simon, P.L., Kalliadasis, S., Merkin, J.H., Scott, S.K., Stability of flames in an exothermic-endothermic system. *IMA J. Appl. Math.* **69** (2004), 175-203.

[63] Simon, P.L., Kalliadasis, S., Merkin, J.H., Scott, S.K., On the structure of the spectra for a class of combustion waves, *J. Math. Chem.* **35** (2004), 309-328.

[64] Simon, P.L., Kiss, I.Z., From exact stochastic to mean-field ODE models: a new approach to prove convergence results, *IMA J. Appl. Math.*, 2012, doi: 10.1093/imamat/hxs001.

[65] Simon, P.L., Taylor, M., Kiss, I.Z., Exact epidemic models on graphs using graph automorphism driven lumping, *J. Math. Biol.* **62** (2010), 479-508.

[66] Taylor, M., Simon, P. L., Green, D. M., House, T., Kiss, I. Z., From Markovian to pairwise epidemic models and the performance of moment closure approximations, *J. Math. Biol.* **64** (2012), 1021-1042.